UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.

Curso 2011/2012

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ANÁLISIS DIDÁCTICO:

DISEÑO, PRÁCTICA Y VALORACIÓN DE UNA PLANIFICACIÓN DE TRABAJO EN EL AULA DE SECUNDARIA

Fecha: **30-5-2012**

Especialidad: **Matemáticas**

Alumna: **María del Mar Martín García**

Tutora de la Universidad de Almería: **Eva María Artés Rodríguez**

V. B.

1. PRESENTACIÓN.

Dentro del ámbito de las *Matemáticas de Educación Secundaria*, el presente trabajo aborda, como objeto de investigación, el proceso de transformación de los diversos niveles de los diseños curriculares de la especialidad –Diseño Curricular Base, Proyecto Curricular de Centro, Programación del Área, Programación del Departamento- en una Planificación de Aula, la cual será puesta en práctica y valorada en función de los resultados de aprendizaje obtenidos.

1.1. TEMA DE ESTUDIO: “ANÁLISIS DIDÁCTICO: DISEÑO, PRÁCTICA Y VALORACIÓN DE UNA PLANIFICACIÓN DE TRABAJO EN EL AULA DE SECUNDARIA”.

Durante el periodo de Prácticas, el alumnado del Máster de Profesorado de Secundaria nos hemos enfrentado a la labor de planificar y llevar a la práctica un número determinado de sesiones de clase. El Análisis Didáctico, estudiado en la asignatura *Aprender a enseñar Matemáticas*, no sólo es una herramienta que nos facilita el desarrollo de estas dos tareas, sino que, además, nos ofrece la posibilidad de valorar el resultado de la experiencia, produciéndose información relevante para reajustar y mejorar todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el desarrollo teórico de la asignatura no ha habido posibilidad de trabajar esta última etapa relacionada con la evaluación. Sin embargo, las Prácticas han constituido una excelente oportunidad real para poner a prueba y completar el ciclo del Análisis Didáctico, tomando como fundamento el trabajo desarrollado en la asignatura *Aprender a enseñar Matemáticas.*

1.2. JUSTIFICACIÓN TEÓRICA Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN.

La competencia de planificar unidades didácticas, una de las prioritarias del profesor, exige una “reelaboración” del conocimiento técnico de Matemáticas que posee, ya que la normativa curricular no deja de ser un marco general que contiene indicaciones genéricas, por lo que no proporciona las suficientes herramientas para la planificación local de secuencias didácticas. En este escenario, el Análisis Didáctico constituye un instrumento que permite, de modo sistemático, abordar esta tarea.

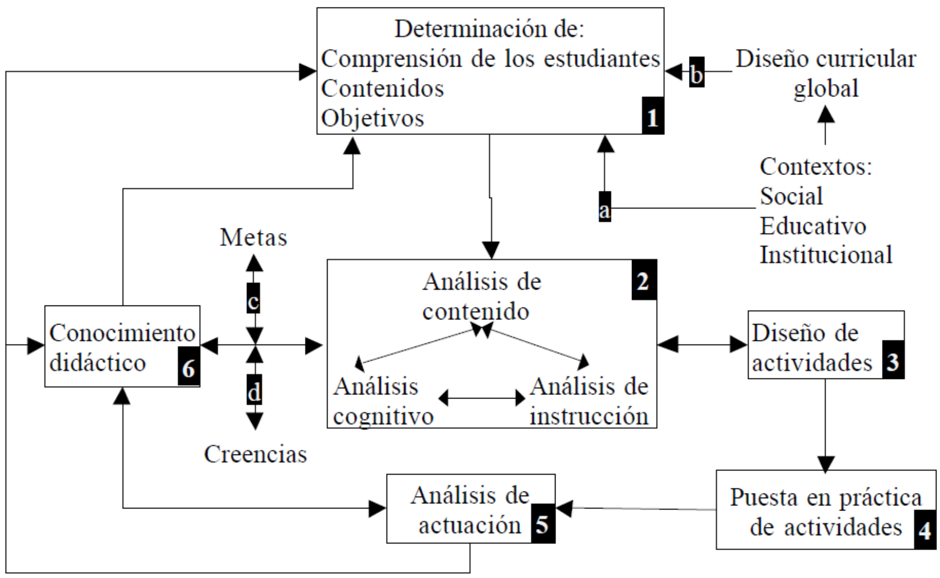
Se puede definir el Análisis Didáctico como un procedimiento ideal que el profesor puede utilizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Tiene los siguientes aspectos clave:

- El Análisis Didáctico es un procedimiento que se inscribe en un nivel local.
- Se refiere a un contenido, concepto o tema matemático concreto.
- Es un proceso cíclico.

El Análisis Didáctico está integrado por cuatro tipos de análisis:

Análisis	Foco de atención
De Contenido	Contenido
Cognitivo	Aprendizaje
De Instrucción	Enseñanza
De Actuación	Evaluación

El siguiente esquema resume el ciclo del Análisis Didáctico (*Gómez*, 2002):



Ciclo de análisis didáctico

Según *Gómez* (2002), *el análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción. A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis. En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas. Por consiguiente, la selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje. El profesor pone en práctica estas actividades y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sire como punto de inicio de un nuevo ciclo.*

En el transcurso de la asignatura *Aprender a Enseñar Matemáticas*, del Módulo Específico del Máster, se han trabajado en profundidad las tres primeras fases del Análisis Didáctico. En el presente documento se pretende completar el ciclo con la última fase, el Análisis de Actuación, tomando como base la experiencia adquirida en las Prácticas del Máster.

2. ANÁLISIS DIDÁCTICO: METODOLOGÍA, TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN.

Para llevar a cabo el Análisis Didáctico, en primer lugar, se deberá estudiar, como se hará más adelante, el contexto general en el que se va a llevar a cabo la investigación:

- Contexto físico y social.
- Contexto educativo e institucional.
- Diseño curricular global.
- Análisis de actuación del ciclo anterior.
- Contenidos y objetivos didácticos.

Una vez concluida esta fase previa, se desarrollará el proceso del Análisis Didáctico propiamente dicho. Ahondaremos en el significado teórico de cada una de las fases de análisis en las que se estructura el Análisis Didáctico: de Contenido, Cognitivo, de Instrucción y de Actuación.

2.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO.

El Análisis de Contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares, o dicho de forma más breve, es el "análisis del contenido matemático escolar". La manera en que el profesor recoja, analice, organice, seleccione e interprete la información estará condicionada por:

- sus conocimientos y creencias,
- los contextos (cultural, social, institucional y del aula) en los que realiza su labor.

Como resultado de esta etapa inicial del análisis didáctico, el profesor puede:

- seleccionar los significados de referencia del concepto matemático objeto de la instrucción y
- delimitar los objetivos de aprendizaje que desea lograr con respecto a dicho concepto.

Las dimensiones del significado de un concepto matemático son:

- los signos o sistemas de representación que se utilizan,
- la referencia formal, dada por la estructura conceptual, y
- el sentido con que se trabajan los diversos conceptos o fenomenología.

Los <u>sistemas de representación</u> tienen una gran importancia en el análisis de contenido, ya que:

- organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos,
- al existir distintos sistemas de representación, aportan distintos significados para cada concepto, por lo que un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios.

Por otra parte, la construcción del mapa conceptual con base en los sistemas de representación es un proceso cíclico en el que se debe poner en juego el conocimiento matemático. En un mapa conceptual se pueden identificar diferentes tipos de conexiones:

- conexiones que establecen relaciones entre diferentes elementos de la estructura matemática,
- conexiones que asocian las diferentes representaciones de un mismo elemento,
- conexiones que muestran transformaciones de un elemento en otro dentro de un sistema de representación, y
- conexiones que muestran la relación entre categorías de fenómenos y las subestructuras con las que es posible organizarlos.

La fenomenología, por último, sería la dimensión del significado de un concepto que se refiere a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto. Es decir, el concepto adquiere sentido con respecto a los fenómenos correspondientes, cuando los fenómenos están vinculados con situaciones que el concepto permite describir o con cuestiones que el concepto permite plantear.

Además de estas tres dimensiones, en el apartado del Análisis de Contenido, se reseñará brevemente la dimensión histórica del contenido trabajado, como aspecto notable y subyacente en todo contenido matemático.

El proceso en el que se caracterizan las tres dimensiones relevantes para la instrucción (sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología), es decir, se determina el contenido propuesto para un concepto, es el eje central y el objeto del análisis de contenido. Por tanto, el profesor deberá ser capaz de:

- recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
- organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; y
- seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción.

Todo ello le permite realizar la selección de *los focos conceptuales* o *significados de referencia*. Además de seleccionar los *focos conceptuales*, deberá determinar los objetivos de aprendizaje a partir de:

- su percepción sobre las capacidades que los escolares ya han desarrollado y

- su previsión sobre cómo los escolares pueden desarrollar las capacidades involucradas en los objetivos de aprendizaje al abordar las tareas objeto de la instrucción.

2.2. ANÁLISIS COGNITIVO.

Si en el análisis previo el foco de atención era el contenido, en el Análisis Cognitivo el foco de atención es el *aprendizaje*.

Se trata de hacer una descripción de las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre el contenido matemático analizado anteriormente y sobre el modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje. Para ello, tiene que tener en cuenta los focos de interés delimitados en el análisis de contenido y los objetivos específicos que se propone en torno a esos focos.

El análisis cognitivo es un análisis a priori. Con él, el profesor pretende prever las actuaciones de los escolares en la fase posterior del ciclo en la que se ponen en juego las actividades de enseñanza y aprendizaje que había diseñado. Estas conjeturas deben estar sustentadas por una descripción de aquellos aspectos cognitivos que se relacionan directamente con la estructura matemática sobre la cual se trabaja en dichas actividades. Por lo tanto, el análisis de contenido sirve de punto de partida y punto de referencia para el análisis cognitivo. Por su parte, el análisis cognitivo debe proveer la información necesaria para realizar el análisis de instrucción.

En resumen, el Análisis Cognitivo es un procedimiento sistemático en virtud del cual el profesor identifica, describe y organiza sus hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los escolares. Este análisis hace explícitas las capacidades de los escolares, las dificultades y errores que los escolares pueden tener durante el proceso de aprendizaje y la contribución de dichas capacidades al desarrollo de las competencias del curso - *Lupiañez, J.L.* y *Rico, L* (2008) -. También identifica posibles caminos de aprendizaje o trayectorias hipotéticas de aprendizaje - *Gómez, P.* (2007) -.

La problemática del Análisis Cognitivo es compleja y puede enfocarse desde muchos puntos de vista. Aquí haremos una aproximación concreta que se vertebra en torno a tres dimensiones:

- Expectativas de aprendizaje (objetivos, capacidades y competencias).
- Errores y dificultades.
- Caminos de aprendizaje.

Cuando se trata de establecer las expectativas de aprendizaje que se desean desarrollar en el tema matemático, se seleccionan los *objetivos* de aprendizaje que se pretenden alcanzar, se identifican qué *capacidades* pondrán en juego los estudiantes y se determinan a qué *competencias* se quiere contribuir.

Igualmente, se tratará de determinar las limitaciones en relación con el aprendizaje que surgen en el tema matemático: qué dificultades y errores van a surgir en el proceso de aprendizaje. Para ello se puede recurrir a los registrados en la literatura y al propio conocimiento del profesor, derivado de su experiencia práctica.

Un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor de matemáticas porque le proporciona información sobre la forma en la que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta. Evidentemente, los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje. Así pues, el análisis de los errores tiene un doble interés: de una parte sirve apara ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.

Con los caminos de aprendizaje, se trata de expresar conjeturas sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje para conseguir los objetivos de aprendizaje, es decir, se trata de prever el proceso que seguirán los alumnos cuando pongan en juego las capacidades identificadas para el logro de objetivo correspondiente. Se hará un doble análisis: por una parte, de los conocimientos previos de nuestros estudiantes y de su modo de actuar ante un problema y, por otra parte, de los caminos de aprendizaje que siguieron otros estudiantes al realizar estas mismas actividades durante experiencias anteriores.

Así pues, a partir de la información que surge del análisis de contenido, el profesor debe ser capaz de establecer:

- las competencias que se quieren desarrollar,
- los focos de interés que se han de tratar,
- las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción,
- las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados de referencia)
- las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción),
- las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

2.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.

En el Análisis de Instrucción el foco de interés se pone en la *enseñanza*. Se trata de un procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, analizar y organizar las tareas disponibles para el diseño de una secuencia de enseñanza-aprendizaje. Éste es un procedimiento esencial del diseño de unidades didácticas. El profesor necesita herramientas que le permitan establecer, con algún grado de certidumbre, la pertinencia de una tarea (o secuencia de tareas) con respecto a los objetivos de aprendizaje que se ha propuesto. Con el fin de evaluar la pertinencia de las tareas, se propone atender a distintas dimensiones:

- Selección de tareas. Dado un objetivo de aprendizaje concreto, se trata de identificar y/o diseñar tareas encaminadas a promover su logro por parte de los estudiantes. Hay que organizar dichas tareas en una secuencia, de tal manera que si un estudiante es capaz de resolver esas tereas, pueda afirmarse que ha logrado el objetivo de aprendizaje propuesto.

- Materiales y recursos. Los materiales y recursos son clave para promover la comprensión del alumnado, no sólo a edades tempranas, sino a lo largo de todos los niveles educativos. La actividad que promueven, unida a la reflexión que el docente ha de fomentar, a través de preguntas sobre dicha actividad, contribuye a promover la inducción de propiedades, la formulación de conjeturas, la comprobación de éstas, la autonomía… En suma, un buen número de procesos matemáticos que no se ejercitan sin la ayuda de un soporte manipulativo o interactivo.

- Resolución de problemas. Se ha de prestar atención a introducir en la secuencia alguna (o más de una) tarea que cumpla las siguientes características: es significativa para el estudiante, porque se encuadra en un contexto que le resulta atractivo y motivante; el estudiante es capaz de abordarla a partir de sus conocimientos previos, pero representa un reto intelectual porque no se resuelve mediante un procedimiento rutinario, sino que obliga a reestructurar y conectar conocimientos para dar solución a la situación.

- Análisis de las tareas. Una vez establecida la secuencia de tareas correspondiente a un determinado objetivo, teniendo en cuenta las consideraciones de las dimensiones anteriores, procederemos al análisis de cada tarea. Para ello, estableceremos una hipótesis de aprendizaje para la tarea, en forma de sucesión de capacidades constituida por los pequeños pasos que un estudiante podría dar para resolverla. En esta sucesión de capacidades, insertaríamos una previsión de errores que podría cometer, en los momentos del camino en que podría cometerlos. Una vez realizado este trabajo para todas las tareas del objetivo, contrastaremos las capacidades y errores previstos con los que se contemplaron en el análisis cognitivo para el objetivo. Realizaremos a continuación los ajustes pertinentes. Además, puede analizarse qué competencias PISA la tarea puede contribuir a desarrollar.

- Organización de las tareas. Se trata de prever cómo llevaremos la tarea a la clase. Cómo la introduciremos para que resulte motivadora, cómo la relacionaremos con el objetivo de aprendizaje, cómo agruparemos a los alumnos para que la trabajen, qué ayudas proporcionaremos cuando las necesiten, cómo realizaremos la socialización del aprendizaje (en qué momentos, a través de qué cuestiones, cómo daremos voz a los alumnos…)

- Organización de la secuencia. Una vez que esté organizado el diseño de la instrucción para cada objetivo correspondiente al foco de aprendizaje, ensamblaríamos una secuencia didáctica correspondiente a dicho foco temático. Para ello introduciríamos el tema presentando una visión de conjunto, lo desglosaríamos en objetivos con sus tareas correspondientes y plantearíamos una revisión y síntesis al final.

Para efectos de analizar y seleccionar las tareas que conforman la instrucción, el profesor ha de ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:

- identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares las aborden,
- identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir,
- establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea, y
- evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

2.4. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN.

En el Análisis de Actuación se valora el resultado de la puesta en práctica de la planificación elaborada por el profesor. El foco de atención será, por tanto, la *evaluación*. El análisis de actuación está relacionado con la evaluación, en el sentido habitual del término, pero no es equivalente a ella. Dependiendo de la concepción que el profesor tenga de la evaluación, la relación entre estos dos procedimientos puede ser más o menos estrecha.

El propósito de este análisis no es clasificar a los escolares para ponerles una nota, sino:

- establecer el seguimiento del progreso de su progreso, al comparar las previsiones que se hicieron con lo que sucedió cuando la secuencia didáctica diseñada se puso en práctica en el aula;
- establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula;
- caracterizar el aprendizaje de los escolares; y
- producir información relevante para reajustar la planificación durante su implementación, así como para la planificación en un nuevo ciclo del Análisis Didáctico.

El Análisis de Actuación puede utilizar la información que surge de las pruebas de evaluación, pero también debe basarse en el análisis de la actuación de los escolares al abordar las tareas y al interactuar con los compañeros y con el profesor.

Para articular la comparación de lo planificado con lo sucedido en el aula atenderemos a las dimensiones que se indican a continuación:

- Averiguar en qué medida los escolares han alcanzado los objetivos de aprendizaje, al identificar los caminos de aprendizaje que ejecutaron y en qué medida las capacidades correspondientes contribuyeron al desarrollo de las competencias propuestas.

- Revisar si las tareas indujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que podían manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades.

- Identificar aquellos caminos de aprendizaje y capacidades que se pusieron en juego y aquellos que no.

- Reconocer las capacidades, caminos de aprendizaje, dificultades y estrategias no previstos y que se manifestaron en la práctica.

- Decidir, en función de lo anterior, cuáles son los siguientes pasos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto de manera local, como para la planificación del ciclo siguiente.

- Ayudar a los escolares a dar esos pasos.

- Implicar a los propios escolares en el proceso de evaluación y, por consiguiente, en su proceso de aprendizaje.

3. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

En este apartado se estudian los condicionantes de todo tipo previos al planteamiento práctico del Análisis Didáctico.

3.1. CONTEXTO FÍSICO Y SOCIAL.

Las Prácticas del Máster se han desarrollado en el IES Celia Viñas, ubicado en la ciudad de Almería. A continuación se ofrece una visión general del contexto físico y social en el que se inscribe este centro.

Contexto

El IES Celia Viñas es el único Centro de Enseñanza Secundaria público situado en el centro de la ciudad, ya que el resto de centros del entorno son privados o concertados. En él, no solo se imparten Enseñanza Secundaria y Bachillerato, sino que también hay grupos de Bachillerato para Adultos y Formación Profesional de grado Medio y Superior.

Lógicamente, el entorno físico y social condiciona las características propias de este centro. Por un lado, existe un clima de tranquilidad social y de cierta estabilidad económica en la mayoría de las familias de clase media y media alta, mientras que por otro lado, existen otras situaciones de cierta inseguridad socioeconómica, inestabilidad laboral, desempleo e, incluso, de desamparo o exclusión social de alguna porción del alumnado, el cual está bajo la tutela de las autoridades de la Junta de Andalucía.

No obstante, la pluralidad, riqueza cultural y étnica del alumnado del Centro que en ningún caso ha supuesto merma alguna para la convivencia escolar, según se recoge en el Proyecto Educativo de Centro.

El edificio

El edificio, de más de 150 años de antigüedad, está configurado por gruesos muros de sillería y techos artesonados, y se estructura en cuatro plantas. Debido a su propia naturaleza y configuración, las dependencias del edificio presentan ventajas e inconvenientes relacionadas con aspectos como la luminosidad, ventilación, sonoridad, flexibilidad de los espacios, climatización, imposibilidad de ampliaciones y existencia de barreras arquitectónicas.

Se distribuye, a grandes rasgos, en pistas deportivas, patio, gimnasio, cafetería, almacenes, talleres, aulas de informática, espacios técnicos, diversas aulas específicas, aulas en general, departamentos didácticos y de orientación, conserjería, secretaría, dirección, dependencias para profesores, salón de actos y biblioteca.

El centro cuenta con conexión a Internet, así como con un buen material audiovisual e informático.

Profesorado, alumnado y familias

Se puede definir al profesorado como estable y veterano, con más de 20 años de experiencia docente en muchos casos.

Respecto al alumnado, una gran parte del mismo muestra una buena disposición para el esfuerzo en la realización de tareas y el estudio, además de mostrarse, en general, respetuoso y educado con el profesorado. En algunos casos, se ha detectado la falta de motivación, lo que provoca a su vez un desinterés que ocasiona actitudes que dificultan la práctica docente. La atención personalizada por parte de los tutores y tutoras – dentro de lo que la ratio lo permite –, más la intervención del departamento de Orientación, Jefatura de Estudios y el contacto con las familias ha tratado de poner soluciones. Tan sólo en una pequeña parte se han registrado casos de absentismo que suelen coincidir con miembros de familias desestructuradas.

No hay problemas relevantes de convivencia, adaptación ni integración.

Las familias, mayoritariamente, se muestran dispuestas a colaborar con los docentes, aunque en algunos casos aislados, coincidentes con familias desestructuradas, no ha sido así, observándose incluso algunas reticencias a aceptar medidas correctoras cuando afectan a sus hijos o hijas. En ocasiones, existe una cierta falta de implicación a la hora de asistir a las tutorías, debido, seguramente, a la incompatibilidad de horarios, en una sociedad en la que se hace difícil compaginar trabajo y familia.

3.2. CONTEXTO EDUCATIVO E INSTITUCIONAL.

En el Plan de Centro se recogen los siguientes Objetivos Educativos:

- **Ámbito organizativo**. Se fomenta la participación de todos los miembros de la comunidad educativa, en un clima de apertura, flexibilidad y responsabilidad.

- Ámbito convivencial. Se promueve la formación de valores, hábitos y actitudes dentro de una formación integral, tolerante y solidaria.

- Ámbito pedagógico. Se impulsa la enseñanza y aprendizaje de los mecanismos relacionados con la adquisición de conocimientos, actitudes, aptitudes y capacitación de las personas para todos los ámbitos de la vida.

- Ámbito social. Se persigue la integración del Centro en su entorno social, económico y cultural.

3.3. DISEÑO CURRICULAR GLOBAL.

3.3.1. EL PLAN DE CENTRO.

En este apartado se aborda el modo de concreción de los contenidos curriculares para ESO recogido en el Plan de Centro del IES Celia Viñas.

La Comisión Europea de Educación establece 8 competencias necesarias para lograr la realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaces de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida. Y estas son según el Anexo I del R.D. 1531/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la ESO:

. Competencia en comunicación lingüística.
. Competencia matemática.
. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
. Tratamiento de la información y competencia digital.
. Competencia social y ciudadana.
. Competencia cultural y artística.
. Competencia para aprender a aprender
. Autonomía e iniciativa personal.

El Real Decreto, en el artículo 3, establece 12 objetivos que contribuirán a desarrollar las capacidades que permitan lograr la finalidad de la educación secundaria obligatoria: lograr que los alumnos y las alumnas adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanístico, artístico, científico y tecnológico; desarrollar y consolidar en ellos hábitos de estudio y de trabajo; prepararles para su incorporación a estudios posteriores y para su inserción laboral, y formarles para el ejercicio de sus derechos y obligaciones en la vida como ciudadanos.

Estos doce objetivos son:

. Asunción responsable de deberes propios y derechos de los demás.
. Desarrollar hábitos de disciplina, estudio y trabajo.
. Respetar la diferencia de sexos.
. Fortalecer capacidades afectivas y rechazar violencia y prejuicios.
. Desarrollar la utilización de las TICs y el sentido crítico.
. Desarrollar el conocimiento científico y sus métodos.
. Desarrollar el espíritu emprendedor.
. Desarrollar la comprensión y la expresión oral y escrita.
. Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras.
. Conocer y respetar las diferencias culturales e históricas.
. Desarrollar hábitos saludables y de consumo responsable.
. Apreciar la creación artística.

Esta etapa debe contribuir a desarrollar en el alumnado los saberes, las capacidades, los hábitos, las actitudes y los valores que les permitan alcanzar, además, los siguientes objetivos:

1. Adquirir habilidades que les permitan desenvolverse con autonomía en el ámbito familiar y doméstico, así como en los grupos sociales con los que se relacionan, participando con actitudes solidarias, tolerantes y libres de prejuicios.

2. Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos.

3. Comprender los principios y valores que rigen el funcionamiento de las sociedades democráticas contemporáneas, especialmente los relativos a los derechos y deberes de la ciudadanía.

4. Comprender los principios básicos que rigen el funcionamiento del medio físico y natural, valorar las repercusiones que sobre él tienen las actividades humanas y contribuir activamente a la defensa, conservación y mejora del mismo como elemento determinante de la calidad de vida.

5. Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.

6. Conocer y respetar la realidad cultural de Andalucía, partiendo del conocimiento y de la comprensión de Andalucía como comunidad de encuentro de culturas.

Los métodos pedagógicos en la Educación Secundaria Obligatoria se adaptarán a las características del alumnado, favorecerán la capacidad para aprender por sí mismos y para trabajar en equipo promoviendo la creatividad y el dinamismo, e integrarán los recursos de las tecnologías de la información y de las comunicaciones en el aprendizaje. El alumnado se iniciará en el conocimiento y aplicación de los métodos científicos.

3.3.2. LA PROGRAMACIÓN DEL ÁREA CIENTÍFICO-TECNOLÓGICA.

Los objetivos del Área Científico-Tecnológica del IES Celia Viñas son los siguientes:

- Mejora del éxito escolar del alumnado: Priorizar los aspectos básicos de cada materia y tener en cuenta la diversidad del alumnado del aula.

- Reducción del abandono escolar prematuro: Generar confianza en las posibilidades de progreso de cada alumno/a, colaborar en la labor tutorial y colaborar en la orientación personal y profesional.

- Favorecer la adquisición de las competencias básicas por el alumnado, en especial, las competencias de razonamiento matemático, en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y natural, y la digital y de tratamiento de la información: Especificación de las subcompetencias y recomendación y propuesta de actividades tipo.

- Impulsar métodos pedagógicos y proponer actividades que contribuyan al desarrollo de las compentencias.

- Integrar los contenidos de las distintas materias para ofrecer una visión multidisciplinar de las mismas: Incluir actividades de motivación y síntesis, enfocar las asignaturas en proyectos multidisciplinares y poner de manifiesto la interrelación existente entre la ciencia, la tecnología y la sociedad.

- Favorecer el trabajo en equipo del profesorado del área.

3.3.3. LA PROGRAMACIÓN DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Se recogen, por un lado, los aspectos relacionados con los objetivos generales, y por otro, con las competencias básicas.

Objetivos Matemáticos:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: Utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados para cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc) presentes en los medios de comunicación. Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas, identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de resultados y de su carácter exacto y aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y a adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde el punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

12. Capacitar al alumno para hacer una lectura lenta y comprensiva de la asignatura, para que sepa, en cada situación, distinguir lo esencial de lo accesorio.

13. Dotar al alumno de la capacidad necesaria para poder interpretar con exactitud lo que significa cada palabra y cada expresión del lenguaje matemático.

14. Enseñar a razonar y crear en el alumno la necesidad de demostrar e investigar.

15. Capacitar al alumno para obtener concusiones de sus deducciones, así como a aplicar dichas conclusiones.

16. Adiestrar al alumno en el cálculo y en estrategias generales para abordar la solución de un problema (ensayo-error, experimentación, simplificación, modelo, etc.)

17. Desarrollar y aumentar su capacidad de síntesis y de crítica hacia otras conclusiones.

18. Generar en los alumnos confianza en sus posibilidades para aprender los conceptos matemáticos.

Competencias Básicas:

- **Competencia de razonamiento matemático** (C2):

Se encuentra, por su propia naturaleza, íntimamente asociada a los aprendizajes que se abordarán en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la materia. El empleo de distintas formas de pensamiento matemático para interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella forma parte del propio objeto de aprendizaje. Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar habilidades, destrezas y actitudes que hacen posible comprender argumentos y expresar y comunicar en el lenguaje matemático. En este sentido, la resolución de problemas debe entenderse como la esencia fundamental del pensamiento y el saber matemático, y debe considerarse como eje vertebrador de todo el aprendizaje matemático, orientándose hacia la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad, tanto en la vida cotidiana como respecto a los grandes problemas que afectan a la humanidad.

- **Competencia social y ciudadana** (C5):

Está vinculada a las Matemáticas a través del empleo del análisis funcional y la estadística para estudiar y describir fenómenos sociales del entorno de Andalucía. El uso de las herramientas propias de la materia mostrará su papel para conocer y valorar problemas de la sociedad actual, fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de oportunidades entre los sexos o la convivencia pacífica. Será interesante desde al dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas analizar las aportaciones a la ciencia y las circunstancias personales de mujeres como Teano, Hipatia, María Gaëtana Agnesi, Sophie Germain, Sofía Kovalevskaia, Amalie Noether, entre otra, contribuyendo a la toma de conciencia de las dificultades que las mujeres han tenido para acceder a la educación en general y a la ciencia en particular a lo largo del tiepo, invitando a la reflexión y al análisis sobre la situación de las mujeres en nuestra sociedad actual. La participación, la colaboración, la valoración de la existencia de diferentes puntos de vista y la aceptación del error de manera constructiva constituyen también actitudes que cooperarán en el desarrollo de esta competencia.

- Conocimiento e interacción con el mundo físico y natural (C3):

Una significativa representación de contenidos matemáticos tienen que ver con ella. Son destacables, en este sentido, la discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, especialmente con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio. También son apreciables las aportaciones de la modelización. Ésta requiere identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real, representarla simbólicamente y determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes, a partir de las que poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones del modelo.

- **Tratamiento de la información y competencia digital, competencia para aprender a aprender, autonomía e iniciativa personal** (C4, C7, C8):

Estas tres competencias se desarrollan por medio de la utilización de recursos variados trabajados en el desarrollo de la materia. Comunicarse, recabar información, retroalimentarla, simular y visualizar situaciones, obtener y tratar datos, entre otras situaciones de enseñanza aprendizaje, constituyen vías de autonomía e iniciativa y de aprender a aprender; también la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica, la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. Por supuesto, los propios procesos de resolución de problemas realizan una aportación significativa porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos, y contribuyen a convivir con la incertidumbre, controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones. En Andalucía destacan el papel de las TIC no sólo como apoyo para la realización de cálculos, sino como herramienta para la construcción del pensamiento matemático y para la comunicación de los procesos seguidos. Las TIC no sólo como apoyo para la realización de cálculos, sino como herramienta para la construcción del pensamiento matemático y para la comunicación de los procesos seguidos. Las TIC nos ofrecen un amplio abanico de nuevas herramientas que deben enriquecer el proceso de evaluación del alumnado, tales como simuladores (Derive, Cabri, Geogebra, Máxima…), cuestionarios de corrección automatizada, webquests, cazas del tesoro, autoevaluaciones, entre otras.

- **Competencia en comunicación lingüística** (C1):

Las Matemáticas constituyen un ámbito de reflexión y también de comunicación y expresión. Se apoyan y, al mismo tiempo, fomentan la comprensión y expresión oral y escrita en la resolución de problemas (procesos realizados y razonamientos seguidos que ayudan a formalizar el pensamiento del lenguaje matemático (numérico, gráfico, geométrico y algebraico), es un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para comunicar gracias a un léxico propio de carácter, sintético, simbólico y abstracto. El cultivo de esta competencia se ve favorecido por el trabajo con textos orales y escritos, propios de la lengua y cultura andaluza, así como en la verbalización de razonamientos que permitirá que los alumnos lleguen a conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.

- **Competencia en expresión cultural y artística** (C6):

Esta competencia constituye una expresión de la cultura. La geometría es, además, parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea, apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia. El cultivo de esta competencia se ve favorecido por la búsqueda de relaciones entre el arte y las matemáticas (presencia de mosaicos y frisos en los monumentos andaluces, números racionales en diferentes elementos arquitectónicos…).

Relación entre las Competencias Básicas y los Objetivos:

Competencias básicas	Objetivos de la materia	Metodología
Competencia 1	Objetivo 1	- Actividades introducidas con amplia lectura - Lectura histórica al comienzo de cada Unidad Didáctica - Actividades que permitan la expresión oral y escrita de relaciones funcionales o numéricas - Actividades de grupo que inciten la expresión oral de las Matemáticas
Competencia 2	Objetivos 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10	- Actividades de corte procedimental para resolución de operaciones básicas, ecuaciones, progresiones, interpretación de información gráfica o sobre cálculo de probabilidades
Competencia 3	Objetivo 10	- Actividades de lectura relativa a Biologia, Quimica, Tecnologia ó Física, que invitan al diálogo sobre medio ambiente o salud
Competencia 4	Objetivos 4, 6, 10	- Búsqueda de información en páginas web o prensa acorde con los contenidos de cada Unidad Didáctica - Búsqueda de imágenes que plasmen información sobre los contenidos
Competencia 5	Objetivo 10	- Actividades introducidas sobre cuestiones éticas que invitan al diálogo sobre ciudadanía, compromisos sociales, igualdad de sexos, problemas sociales,....
Competencia 6	Objetivo 11	- Realización de giros, traslaciones, simetrias, frisos y mosaicos como forma de apreciarla dificultad de ciertas figuras - Recopilación de imágenes que permitan apreciar y valorar el sentido artístico de las Matemáticas
Competencia 7	Objetivo 9	La labor del docente es fundamental: - Al premiar logros obtenidos del alumnado e indicarle que los errores no son fracasos sino indicadores de que deben cambiar de estrategia - Al incentivar la confianza del alumnado en sus propias capacidades para afrontar problemas y resolver dificultades
Competencia 8		

3.4. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN DEL CICLO ANTERIOR.

Este apartado trataría acerca de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior. Dado que ésta ha sido una experiencia puntual, no ha sido posible disponer de esta información.

3.5. CONTENIDOS Y OBJETIVOS DIDÁCTICOS.

La planificación que se ha de desarrollar es una parte del tema de *"Figuras planas y lugares geométricos"* de 3º de ESO, el cual es el primero del Bloque III, Geometría, y servirá como introducción para los temas posteriores de movimientos en el plano, semejanzas y cuerpos geométricos. Su desarrollo está previsto para el primer tramo de la tercera evaluación, una vez terminados los bloques de Números y Álgebra, por lo que los planteamientos y las operaciones necesarias para el desarrollo de la unidad no deben ofrecer ningún problema, aunque se seguirán trabajando actividades que afiancen el desarrollo del cálculo y el uso adecuado del lenguaje algebraico.

En esta unidad se estudian conceptos ya tratados en cursos anteriores y que serán revisados y ampliados también en 4ºESO. Se profundiza en el estudio de triángulos y sus elementos notables, de figuras planas, polígonos, medidas y áreas. Además, vuelven a recordarse y se refuerzan teoremas tan importantes como el de Pitágoras y sus múltiples aplicaciones; se recuerdan las medidas de diversas figuras y sus áreas, y se analizan más detalladamente los polígonos regulares, las figuras circulares y otras más complejas. Por último, se introduce el concepto de lugar geométrico.

3.5.1. CONTENIDOS.

Hemos de entender los contenidos como *instrumentos que deben servir al desarrollo de las capacidades* y, por tanto, como *medios para alcanzar los objetivos generales y las competencias recogidos en Plan de Centro, la Programación del Área Científico-Tecnológica y la Programación del Departamento de Matemáticas del IES Celia Viñas*. Esta concepción de los contenidos como medios, y no como fines en sí mismos, facilitará una mayor flexibilidad en la selección de los mismos, en su secuenciación a lo largo de la etapa y en su necesaria adaptabilidad a las diferencias individuales del alumnado.

Contenidos didácticos

Los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales han sido desarrollados en la *TABLA Objetivos-Contenidos*, relacionándolos con los objetivos didácticos y remarcando en negrita los **contenidos mínimos**, considerados básicos por ser los que se derivan de los enunciados en el currículo de Andalucía, según el Decreto 231/2007 y derivados del Anexo II del R.D.1631/2006 en Tercer Curso de E.S.O. en el *Bloque 4: Geometría*, bajo los epígrafes:

"Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico. Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas."
"Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas."

Contenidos Interdisciplinares

El estudio de las Matemáticas impregna en su totalidad al resto de aprendizajes, sobre todo de carácter científico y técnico, de ahí que forme parte de las llamadas ***áreas instrumentales***. Desde este punto de vista, la relación de interdisciplinariedad con el resto de áreas curriculares es constante durante toda la etapa educativa. Destacaremos a continuación las relaciones con otras áreas que se trabajan en la presente programación:

TECNOLOGÍA, PLÁSTICA y CIENCIAS NATURALES: Se realizarán construcciones de figuras planas con regla, compás y otros utensilios, se analizará la presencia de la geometría en la naturaleza y en los modelos humanos, se identificarán diversas manifestaciones artísticas relacionadas y destacaremos la importancia y la utilidad de la Geometría en la construcción, el arte, la arquitectura, etc.

LENGUA E HISTORIA: Para fomentar el uso adecuado del lenguaje y la comprensión lectora, así como el interés por la historia y su importancia, se incluirán actividades relacionadas con la Historia de la Geometría. Además, se incidirá en una correcta expresión y ortografía en la redacción de enunciados de problemas, trabajos monográficos, etc. También se pedirá a los alumnos que defiendan oralmente sus proyectos.

Contenidos Transversales

Actualmente, tanto la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de Mayo, de Educación como la Ley 17/2007, de 10 de Diciembre, de Educación de Andalucía (LEA) establecen la importancia de los contenidos transversales y educación en valores, y la necesidad de su inclusión en el currículo, además incluir otras relacionadas con las necesidades que el contexto sociocultural y económico-laboral demanda. En particular, el Anexo I de la Orden de 10 de Agosto, establece para el área de matemáticas como núcleos temáticos los siguientes contenidos transversales: *Resolución de problemas, Uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas*.

El planteamiento y diseño de todas las actividades incluye valores y aspectos fundamentales como el respeto a los derechos humanos y los valores democráticos, la no-discriminación, actitud crítica ante el consumo, cuidado de la salud y valores de tolerancia, solidaridad y cooperación. Además, en esta programación se tratan temas relacionados con la cultura andaluza, el respeto a la naturaleza y medio ambiente, se fomenta el interés por la lectura y la historia, y se trabajan más profundamente aspectos como:

APLICACIONES PRÁCTICAS: Se buscan aplicaciones prácticas de lo aprendido en problemas de la vida cotidiana. Para resolver un determinado problema, se ha de hacer una *lectura comprensiva*, una pausa, una *reflexión* y hasta puede ser que se *ejecuten pasos* originales que no se habían ensayado antes para dar la respuesta. Esta característica de dar una especie de *paso creativo* en la búsqueda de la solución, por pequeño sea, es lo que distingue un problema de un mero ejercicio.

USO DE RECURSOS TIC: En los ejercicios propuestos y todo el bloque de Geometría se hará uso de internet y del software de geometría dinámica *Geogebra,* así como otros programas sencillos de diseño gráfico. El uso de las nuevas tecnologías desarrolla la capacidad de *resolución de problemas*, la *creatividad* y la *reflexión*. Además, el programa *Geogebra* es muy apropiado para que los alumnos trabajen de forma interactiva la construcción de figuras, el estudio de sus propiedades, etc.

3.5.2. OBJETIVOS DIDÁCTICOS.

Los objetivos didácticos de la presente programación concretan y son coherentes con los más generales del currículo oficial. Se han enumerado en la *TABLA Objetivos-Contenidos* relacionándolos con los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que permiten su consecución. Además, se han seleccionado como **objetivos básicos** o **mínimos** (resaltados en negrita) aquellos que, refiriéndose a capacidades y destrezas más sencillas y elementales, deben ser alcanzados por todos los alumnos al término del proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.5.3. TABLA OBJETIVOS-CONTENIDOS.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS	CONTENIDOS		
	Conceptos	***Procedimientos***	***Actitudes***
1. Clasificar, reconocer y describir los elementos y propiedades de los triángulos.	- **Ángulos en un triángulo.** - Clasificación de triángulos según sus ángulos y sus lados. - **Puntos y rectas notables de un triángulo. Circunferencias.**	Clasificación de triángulos. **Representación de puntos y rectas notables de triángulos.** Cálculo de la circunferencia inscrita y circunscrita.	- Precisión en la representación de triángulos y en el cálculo de sus elementos notables.
2. Identificar distintos polígonos en el plano y determinar sus elementos.	- Ángulos en un polígono regular. - Romboide. Base y altura. - Trapecio. Bases y altura. - Rombo. Diagonales. - Polígono regular. Apotema.	**Cálculo de ángulos en un polígono de *n* lados.** **Representación y clasificación de polígonos y sus elementos.**	- Gusto por la limpieza, el orden y el buen uso de los instrumentos de dibujo en las representaciones geométricas.
3. Entender la definición de lugar geométrico y conocer los más importantes.	- **Lugares geométricos.** - Segmento, mediatriz, bisectriz y circunferencia.	**Descripción y construcción de diversos lugares geométricos.**	- **Valorar las aplicaciones de la geometría en los objetos y elementos del entorno, en otras materias y otras áreas**. - **Interés por encontrar aplicaciones de la geometría en problemas reales.**
4. Plantear y resolver problemas reales donde se utilicen figuras planas y lugares geométricos.		**Resolución de problemas reales en los que se utilicen las figuras planas**, cálculo de medidas y de áreas.	

3.5.4. CAPACIDADES Y COMPETENCIAS BÁSICAS.

Se entiende por competencias básicas el *conjunto de destrezas, conocimientos y actitudes adecuadas al contexto que todo el alumnado que cursa esta etapa educativa debe alcanzar para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la integración social y el empleo*.

Como se ha visto, en el Anexo I del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, se recogen las ocho competencias básicas que deben figurar, al menos, en el currículo de la educación secundaria obligatoria. Se incluye, además, la descripción, finalidad y aspectos distintivos de cada una y el nivel considerado básico que debe alcanzar todo el alumnado al finalizar la etapa:

1. **Competencia en comunicación lingüística.**
2. **Competencia de razonamiento matemático.**
3. **Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y natural.**
4. **Competencia digital y tratamiento de la información.**
5. **Competencia social y ciudadana.**
6. **Competencia cultural y artística.**
7. **Competencia para aprender a aprender.**
8. **Competencia para la autonomía e iniciativa personal.**

De acuerdo con lo dispuesto en la LOE, las competencias básicas forman parte de las enseñanzas mínimas de la educación obligatoria, y por tanto, no sustituyen a los elementos tradicionales del currículo, sino que los completan. La consecución de las competencias básicas se medirá en función de diversas capacidades, destrezas o habilidades que los alumnos consigan, por lo que una capacidad o habilidad puede favorecer la adquisición de varias competencias.

Para la presente programación, el alumnado deberá desarrollar las siguientes capacidades:

CAPACIDADES	COMPETENCIAS
Identificar, analizar, describir y construir figuras geométricas, sus propiedades y elementos más importantes, y apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano como la naturaleza, el arte o la arquitectura.	**1, 2, 3, 6, 7, 8**
Calcular medidas, longitudes y áreas de figuras planas resolver problemas geométricos relacionados con el medio físico, otras ciencias y con la vida real.	**2, 3, 7, 8**
Hacer uso de recursos informáticos y programas para encontrar aplicaciones de la geometría en la vida real así como para recabar información sobre el tema que se solicita.	**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
Planificar, llevar a cabo y defender de manera individual y en grupos, un proyecto gráfico en el que se incluyan las figuras geométricas y sus propiedades como medio de expresión de ideas y conceptos.	**1, 2, 4, 6, 7, 8**

4. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN.

En el presente capítulo se refleja la aplicación del ciclo del Análisis Didáctico, en cada una de sus fases, durante el período de Prácticas del Máster de Educación Secundaria.

4.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO.

4.1.1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

La **representación de un concepto matemático** es considerada como una señal externa (signo o marca) que lo muestra y hace presente; incluye esquemas e imágenes mentales con las que el individuo trabaja sobre las ideas matemáticas (*Rico*, 2000). Mediante las representaciones matemáticas es posible asignar significados y comprender estructuras matemáticas (*Radford*, en *Rico*, 2000).

Los **enunciados matemáticos** pueden ser representados en forma verbal mediante un lenguaje especializado que se desarrolla sobre la estructura del lenguaje cotidiano y posee una gramática propia.

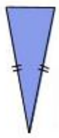
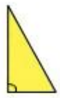
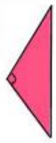
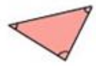
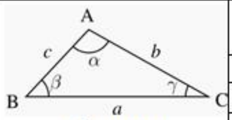
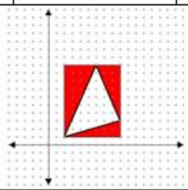
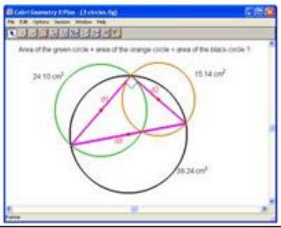
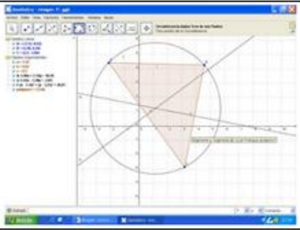
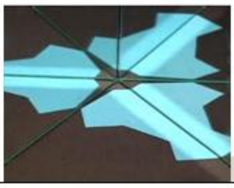
La **representación gráfica** es la imagen de uno o más conceptos, y las relaciones que se plantean entre ellos en una proposición matemática; puede incluir letras que asignen nombres específicos a la figura.

El uso de los **símbolos** matemáticos para representar uno o más conceptos y las relaciones que guardan entre sí, constituye otra forma de representación que se relaciona con las anteriores y obedece a un código específico.

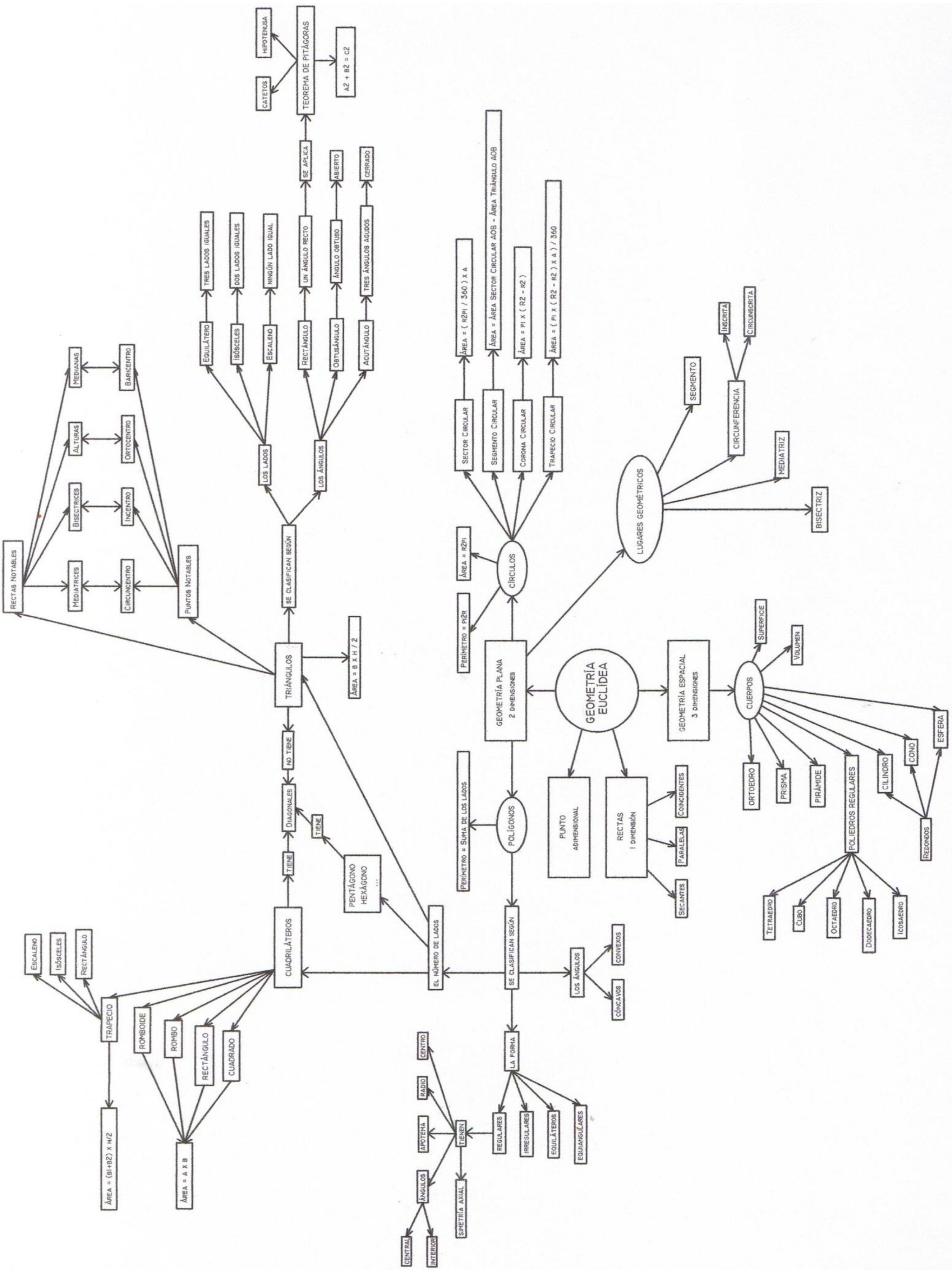
La **traducción** entre las diferentes formas de representación constituye el principal interés, ya que implica el dominio del lenguaje matemático.

Para realizar la labor de **visualización** de un concepto matemático se requiere de la utilización de nociones matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. En consecuencia la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. (*Cantoral & Montiel*, 2002).

Como ejemplo, veamos una muestra de los distintos medios de representación del concepto matemático “triángulo”.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3">REPRESENTACIONES</td><td colspan="6">NUMÉRICA</td></tr>
<tr><td colspan="3">3 lados</td><td colspan="3">3 ángulos</td></tr>
<tr><td colspan="6">MÉTRICA</td></tr>
<tr><td>VERBAL</td><td>definición y tipos</td><td>Un triángulo, o trígono es un polígono determinado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos que no se encuentran alineados (vértices).</td><td>Equilátero
3 lados iguales</td><td>Isósceles
2 lados iguales</td><td>Escaleno
ningún lado igual</td><td>Rectángulo
1 ángulo recto</td><td>Obtusángulo
1 ángulo obtuso</td><td>Acutángulo
3 ángulos agudos</td></tr>
<tr><td>GRÁFICA</td><td>dibujo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">SIMBÓLICA</td><td rowspan="4">notación</td><td rowspan="4">Triángulo ABC</td><td colspan="2">Lados como segmento</td><td>Lados como longitudes</td><td colspan="3">Ángulos</td></tr>
<tr><td colspan="2">BC</td><td>a</td><td colspan="3">$\widehat{\alpha}=\widehat{a}=\widehat{A}=\widehat{BAC}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">AC</td><td>b</td><td colspan="3">$\widehat{\beta}=\widehat{b}=\widehat{B}=\widehat{ABC}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">AB</td><td>c</td><td colspan="3">$\widehat{\gamma}=\widehat{c}=\widehat{C}=\widehat{ACB}$</td></tr>
<tr><td>CARTESIANA</td><td>ejes de coordenadas</td><td colspan="7"></td></tr>
<tr><td>FIGURATIVA</td><td>fenomenología</td><td colspan="7">    </td></tr>
<tr><td>TECNOLÓGICA</td><td>TIC</td><td colspan="7"> </td></tr>
<tr><td>MANIPULATIVA</td><td>modelos
y
materiales</td><td colspan="7">   </td></tr>
</table>

4.1.2. ESTRUCTURA CONCEPTUAL.



4.1.3. FENOMENOLOGÍA.

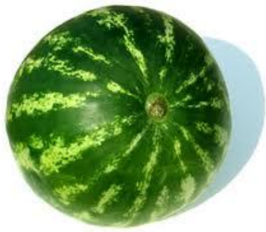
PRESENCIA DE LA GEOMETRÍA EN LA NATURALEZA.

La geometría está siempre presente en la naturaleza y se manifiesta en sus distintos niveles. Este es un hecho que se puede apreciar a simple vista –el mismo Cezánne, a finales del siglo XIX, en su intento de realizar una síntesis ideal de la representación naturalista, opinaba que “todo objeto se puede reducir a figuras geométricas simples, cubos, pirámides, conos…”– o bien, se pueden justificar y demostrar al analizar los conceptos de equilibrio y eficiencia mecánica, dos aspectos estructurales básicos en ingeniería.

Por un lado la naturaleza tiende al equilibrio, ya que éste se define como el estado mecánico en el cual la suma de todas las fuerzas que actúan a la vez en un cuerpo es igual a cero. El desequilibrio no es estable, es imperfecto, y por tanto, en la naturaleza, no perdura. Este equilibrio requiere de la geometría ya que lo alcanzan las figuras que tienden a ser simétricas y puras.

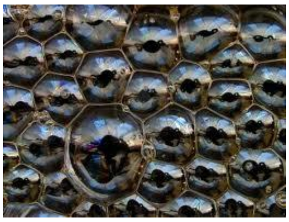
Por otro lado la naturaleza necesita obtener eficiencia mecánica en sus construcciones, ya que de no ser así, sus estructuras no serían estables y no perdurarían. Toda estructura requiere de este concepto para su formación ya sea un esqueleto, las ramas de un árbol o la formación de células.

Una de las formas geométricas presentes de forma evidente sería la esfera. Ésta es una forma geométrica con grandes propiedades como por ejemplo, ser el área mínima posible respecto de su volumen, aspecto muy ventajoso en cuanto al ahorro de espacio en la conservación de materia, como puede ser el caso de una naranja o una sandía. Ésta forma está presente especialmente en medios en los que la gravedad es mínima o tiende a cero, como puede ser el espacio o el medio acuático. Así, las pompas de jabón, los seres unicelulares, las burbujas de aire en el mar, algunos crustáceos, los planetas y las estrellas son algunos ejemplos.



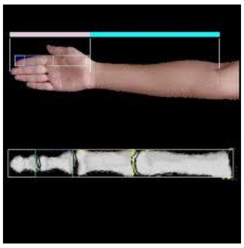
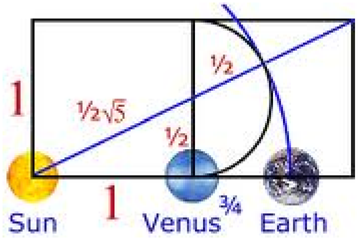
La forma cilíndrica se encuentra en abundantes ejemplos en el medio vegetal. Es el caso de los troncos de los árboles, el tallo de las plantas o de las flores, algunas algas…

Otra de las formas muy comunes en la naturaleza es la hexagonal. Aparece de forma abundante en aglomeraciones de unidades independientes y del mismo tamaño. Es el caso de la espuma formada por pompas de jabón –en contacto unas con otras, en sección, son hexagonales–, las células en los tejidos animales, la estructura formada por los panales de abejas y el parénquima del maíz.




Es difícil hablar de geometría y naturaleza sin nombrar la proporción áurea. Fue Vitrubio en el s I a.C. el descubridor de esta proporción presente en la naturaleza según la cual la relación entre el segmento a y el b es la misma que entre el segmento a y el c. El número o razón que los relaciona es el número irracional 1’618…, es en llamado número dorado o número Phi.

Esta relación geométrica se repite sorprendentemente en la naturaleza en el crecimiento de plantas y flores, frutas (distancia entre las espirales de una piña), proporciones humanas (relación entre la distancia de la mano al codo y del codo al hombro), animales (cantidad de abejas macho y hembras de un panal), proporciones geométricas (relación entre el lado de un pentágono y su diagonal), estelares (órbita de Venus)… Quizá sea esa la razón por la que nos resulta tan bella dicha proporción: aparece tanto en nuestro mundo que nos debe resultar visualmente familiar y armónico. El hecho de aparecer repetida y misteriosamente en la naturaleza de modo tan abundante le dio cierto aire enigmático y divino, (de ahí su nombre) como si alguien (¿Dios?) hubiera incluido esa proporción en sus creaciones. Estéticamente, una división tal nos resulta especialmente adecuada, y por ello, a partir del Renacimiento, se usó de modo casi obsesivo, en detrimento de una división simétrica, pues los grandes maestros consideraban que lo simétrico es estático, y una división desigual como la proporción áurea dotaba a la obra de dinamismo y atractivo visual. Además, si Dios la había usado para sus creaciones, ¿cómo no iba el hombre a utilizarla?

En realidad, ninguna de las formas geométricas de la naturaleza está presente en toda su pureza. Todas ellas son aproximaciones. Es el ser humano el que ha buscado un paralelismo mediante la similitud de formas naturales y las formas geométricas puras aprehendidas mediante la abstracción, pero que sin duda, y por su gran parecido, pueden llegar a compararse.

PRESENCIA DE LA GEOMETRÍA EN LAS CREACIONES HUMANAS A LO LARGO DE LA HISTORIA.

Una mirada a nuestro alrededor basta para encontrarnos con cuerpos creados por el hombre que sugieren formas geométricas. Un libro, una caja de fósforos, un edificio son vistas imperfectas de un paralelepípedo; una lata de conservas y una tiza sugieren un cilindro; un balón de fútbol a una esfera; un cucurucho de helado a un cono…

Desde el principio de los tiempos, los pueblos primitivos demostraron una noción intuitiva de la geometría en cuanto a la medición de distancias terrestres, y en cuanto a sus propias construcciones (la presencia del ángulo recto es muy abundante).

La civilización egipcia desarrolló grandes conocimientos de geometría demostrando su uso práctico en muchas ocasiones, con una precisión asombrosa para los medios con los que se contaban en la época. Formas geométricas como los rectángulos y los cuadrados, cálculo de distancias, uso del número phi, etc. fueron algunos de los aspectos de la geometría que demostraron dominar sobradamente en sus construcciones.

Durante el esplendor de las civilizaciones griega y romana la geometría experimentó uno de sus momentos álgidos, ya que se desarrolló una manera muy rápida y efectiva en un corto período de tiempo. Grecia se ocupó de la evolución de la geometría teórica gracias a varios sabios de la época. Pitágoras se ocupó de las propiedades de los triángulos y los poliedros. Tales de Alejandría, filósofo de la escuela jónica, descubrió las propiedades de los números que tienden a infinito y de los números decimales. Arquímedes, otro filósofo de la misma escuela y gran inventor de objetos de ingeniería, desarrolló el cálculo integral y Apolonio, otro de los destacables, se ocupó de las curvas cónicas.

El último de los geómetras griegos que se va a destacar en este tema por méritos propios es el matemático griego Euclides. Plasmó las ideas principales de sus teorías en una obra titulada Los elementos. En ella se presenta de manera formal, partiendo únicamente de cinco postulados, el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc.; es decir, de las formas regulares. Uno de sus teoremas fue, por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180º. La geometría de Euclides fue una obra que perduró sin variaciones hasta el siglo XIX, lo que es suficiente para valorar la influencia y vigencia que ha tenido esta teoría.

Capítulo aparte merece el arquitecto, inventor, escritor e ingeniero Marco Vitruvio, del siglo I a. C. Estuvo a las órdenes del ejército romano y del propio Julio César. Fue un gran tratadista. Su obra más importante, *De Architectura*, una obra extensa en diez volúmenes que recoge toda su sabiduría y avances obtenidos en el ejercicio de su profesión. En ellos habla de geometría, de proporción, de arquitectura, de urbanismo, de ingeniería, de hidráulica, de mecánica, y un largo etcétera que convierten a esta gran obra en una de las más influyentes de la antigüedad. Será especialmente importante su lectura y redescubrimiento en el Renacimiento.


M. VITRVVII POLLIONIS
DE ARCHITECTVRA
LIBRI DECEM,
CVM COMMENTARIIS
DANIELIS BARBARI,
ELECTI PATRIARCHAE
AQVILEIENSIS:
MVLTIS AEDIFICIORVM, HOROLOGIORVM,
ET MACHINARVM DESCRIPTIONIBVS,
CVM PRIVILEGIIS.
VENETIIS,
M. D. LXVII.

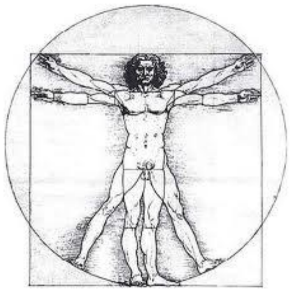
Precisamente fue el movimiento artístico denominado Renacimiento, periodo de grandes cambios políticos, económicos y sociales, la otra gran época de la geometría. Precisamente fue este movimiento el que volvió la vista atrás, aprendió de los autores ya citados de las civilizaciones griega y romana y partiendo de sus premisas y teorías, dio otro gran impulso a esta ciencia. Las traducciones de los manuales y tratados, así como su reproducción gracias a inventos como la imprenta de Gutemberg en el s. XV facilitó la propagación y transmisión de conocimientos como nunca antes se había producido, primero en Italia y posteriormente en toda Europa.

Fueron principalmente tres artistas y estudiosos renacentistas los que impulsaron la ciencia que nos ocupa en este período. El primero de ellos fue el dibujante, escultor y arquitecto Filippo Brunelleschi que desarrolló su trabajo durante el siglo XV.

Personaje destacado por sus investigaciones en torno a la perspectiva, aunque la utilizó y se interesó por ella por sus aplicaciones a la arquitectura, consiguió un conocimiento y profundización en esta disciplina tal, que la defendía como una independiente, no supeditada a la arquitectura ni al arte. Desarrolló métodos efectivos de planimetría y normalización que demostraron su efectividad en sus construcciones. Además, fue gran conocedor de la perspectiva y la representatividad de objetos tridimensionales. Fue consciente de su aplicación también al arte, al dibujo y a la pintura.

El segundo personaje de obligada cita fue el artista, grabador, pintor y escritor de origen alemán Alberto Durero, algo posterior al anterior, vivió durante el siglo XV y XVI y fue el artista más famoso del Renacimiento alemán. Se interesó y estudió a fondo las teorías de Brunelleschi, especialmente en lo relativo a la perspectiva, proyecciones y puntos de fuga. Fue un gran maestro de la geometría descriptiva y proyectiva. Además, escribió tratados sobre la proporción humana basándose en aplicaciones sobre geometría.

Por último, el tercer personaje fundamental de este movimiento en cuanto a la geometría, y en realidad en torno a muchas otras y variadas disciplinas, fue el arquitecto, escultor, pintor, inventor e ingeniero, Leonardo di Ser Piero da Vinci el hombre del Renacimiento por excelencia. Está ampliamente considerado como uno de los más grandes pintores de todos los tiempos y quizá, la persona con más y más variados talentos de la historia. Estudioso de la geometría y la perspectiva, se preocupó especialmente de sus aplicaciones artísticas. Para Leonardo, la pintura era una disciplina a la altura o incluso por encima de otras como la escultura o la arquitectura, y se ocupó de ella en primer lugar, de ahí su excelencia en este campo. Defendió en sus tratados, que se debían respetar tres efectos principales a la hora de captar la realidad en una imagen: la disminución del tamaño aparente de los objetos con el aumento de la distancia del objeto al espectador, la pérdida de los contornos y el color con dicho aumento, y por último, la existencia de efectos como el traslapo (efecto producido por un objeto que se superpone a otro) y el escorzo (efecto producido por un elemento o miembro que se sitúa en dirección al punto de vista del espectador y que reduce su tamaño y aspecto considerablemente). En definitiva tuvo amplias aportaciones a la geometría teórica, en sus escritos y tratados, y a la geometría práctica, en sus aplicaciones no sólo ya a la pintura, sino a la arquitectura, ingeniería y mecánica.

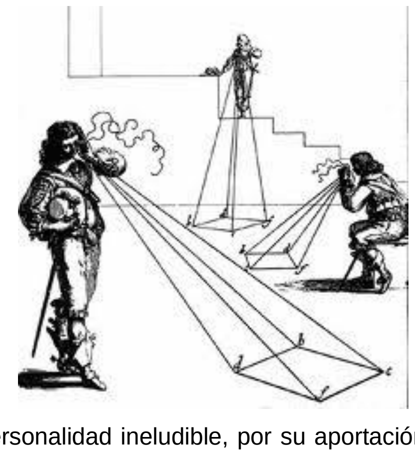


Así, la Historia del Arte considera que este período alcanzó un dominio casi total de la geometría en lo que a aplicaciones y representatividad concierne. Conocimientos que eran rápidamente propagados por toda Europa gracias a la citada invención de la imprenta, a la reciente creación de universidades y a otro gran invento de este momento que facilitó los viajes y el comercio del viejo continente, la brújula.

Pero es sin duda la aparición de la Geometría Cartesiana lo que marca la Geometría en la Edad Moderna. René Descartes, en el siglo XVII propone un nuevo método de resolver problemas geométricos, y por extensión, de investigar en Geometría. Se trataba, simplificándolo mucho, de un sistema formado por un par de ejes de coordenadas perpendiculares, un eje de ordenadas y otro de abscisas, y cuyos puntos vienen dados por dos coordenadas positivas o negativas que los situaban precisamente en el plano.

Avanzando un poco más en la Historia, la siguiente gran aportación a la geometría fue el en siglo XVIII. Fue el francés Gaspard Monge, un profesor de física y matemáticas de diversas universidades y escuelas francesas, quien publica en 1799 su obra *Geometrie Descriptive*. Estuvo al mando del propio Napoleón en varias empresas gracias a su amplio conocimiento multidisciplinar. La geometría descriptiva, invención más trascendente de Monge, es la que nos permite representar sobre una superficie bidimensional, las superficies tridimensionales de los objetos mediante el sistema de representación más importante que exista quizá aún en nuestros días, el llamando Sistema diédrico.

Fue un discípulo de Monge, de la Escuela Politécnica de Metz, Jean-Victor Poncelet, quien continuó desarrollando las teorías de su maestro, explorando sus posibilidades y dándole nuevas aplicaciones. Se ocupó, además, de estudiar y profundizar en la geometría proyectiva y empezó, gracias a ello, a investigar las propiedades que los objetos tridimensionales comparten con sus propias sombras arrojadas. Dejó sus investigaciones escritas en dos volúmenes que investigaba, además, las secciones cónicas.



En el siglo XIX encontramos otra personalidad ineludible, por su aportación al mundo de la geometría. Se trata del suizo Charles-Éduard Jaenneret, más conocido con el sobrenombre de Le Corbusier, apellido de su abuelo materno. Arquitecto, urbanista, teórico de la arquitectura, diseñador y pintor, nacionalizado francés, es considerado uno de los padres de la arquitectura moderna y uno de los arquitectos que mayor influencia han tenido en el siglo XX y en general, en toda la Historia de la arquitectura. Sus ideas eran fruto de una reacción ante una sociedad eminentemente industrializada. Se interesó por el diseño de viviendas unifamiliares, por lo estético pero a la vez funcional, basado en las formas puras y los colores esenciales. Las formas geométricas puras estaban, por tanto, bien presentes en su obra, especialmente el cubo y el ángulo recto.

En 1926 Le Corbusier presenta un documento donde expone en forma sistemática sus ideas arquitectónicas: los llamados «cinco puntos de una nueva arquitectura» representan una importante innovación conceptual para la época, aprovechando las nuevas tecnologías constructivas, derivadas especialmente del uso del hormigón armado. Esta teoría, de gran contenido geométrico, produjo una influencia poderosa en la arquitectura en general, incluido en la actual. Se basaba en un sistema de columnas o pilotes distribuidos en forma geométrica regular que sustentaba la vivienda, de modo que liberaba a la fachada de su función estructural pudiendo abrir grandes ventanales, adelantarla o atrasarla e incluso suprimirla. Es lo que él llamó "fachada libre".

No podemos abandonar el siglo XIX sin nombrar a Carl F. Gauss, matemático, físico y astrónomo alemán. Su principal contribución a la Geometría es la creación de la Geometría Diferencial, retomando las ideas que sobre las relaciones entre el Análisis Matemático y la Geometría había hasta entonces y desarrollándolas ampliamente. Estudia, de un modo novedoso, las superficies curvas y sus propiedades. Establece la definición de geodésica (líneas pertenecientes a superficies curvas, como el ecuador terrestre), y trata los elementos fundamentales en estas superficies, contradiciendo los postulados de Euclides, dando lugar a una nueva concepción de Geometría, la denominada, en honor a su descubridor la Geometría gaussiana.

El otro gran arquitecto, a caballo entre le siglo XIX y XX, fue el estadounidense Frank Lloyd Wright. Conocedor de la obra de Le Corbusier, quien influyó fuertemente en su obra, también se ocupó de manera especial en casas unifamiliares, aunque con un sentido especial para integrarlas en su entorno. Las cubiertas sobresalen considerablemente de las fachadas mediante bloques geométricos en forma de prismas y cubos y las ventanas forman una secuencia continua horizontal. Creó un nuevo concepto respecto a los espacios interiores de los edificios, que aplicó al diseño de viviendas, pero también en sus demás obras. Wright rechaza el criterio existente hasta entonces de los espacios interiores como estancias cerradas y aisladas de las demás, y diseña espacios en los que cada habitación o sala se abre a las demás, con lo que consigue una gran transparencia visual, una profusión de luz y una sensación de amplitud y abertura. Para diferenciar una zona de la otra, recurre a divisiones de material ligero o a techos de altura diferente, evitando los cerramientos sólidos innecesarios. Utiliza las formas curvas tanto para solucionar problemas arquitectónicos en el exterior como en el interior. Pero no se trata de curvas sinuosas y ligeras, sino de auténticas circunferencias y semicircunferencias, como en el caso de la fachada del Museo Guggenheim de Nueva York, en la rampa que distribuye las alturas en ese mismo edificio (una espiral perfecta), como en elementos estructurales (pilares en forma de conos o arcos de circunferencia).

Quizá no encontremos en el siglo XX nuevas concepciones de la Geometría, ni nuevos estudios teóricos revolucionarios. Sin embargo, éste fue un siglo de grandes aplicaciones y asimilaciones. Las vanguardias artísticas tuvieron en más de una ocasión como protagonista a la Geometría. El mismo Paul Cezanne, postimpresionista francés, en su esfuerzo por comprender y reflejar la complejidad de la percepción visual humana e interesado en la simplificación de las formas recurriendo naturalmente a su esencia geométrica declaró que "Todo en la naturaleza se modela según la esfera, el cono, el cilindro. Hay que aprender a pintar sobre la base de estas figuras simples; después se podrá hacer todo lo que se quiera."


Esta frase precisamente ejerció gran influencia sobre el Cubismo, pues en su inicio, trataba de simplificar la naturaleza a sus elementos geométricos fundamentales. Otras vanguardias como el Suprematismo la trataron de modo más directo, pues evitaba explícitamente las formas naturales para basarse en las geométricas puras. También el Constructivismo, movimiento de origen ruso y el Neo-plasticismo, de origen holandés al que perteneció Piet Mondrian, recurrieron a la geometría de este modo directo, especialmente en el uso de paralelogramos, prismas, rectas y puntos y en su traducción al color, es decir, con colores puros.

En el campo de la arquitectura de este siglo, y atendiendo especialmente a aspectos geométricos y estructurales, es necesario nombrar al arquitecto español Santiago Calatrava, autor de la Ciudad de las Ciencias de Valencia. Su trabajo se basa en aspectos estructurales presentes en la naturaleza, y que han demostrado ser eficientes y funcionales en ella. Aprende de esas soluciones que la naturaleza ha dado por azar, y que han permanecido en el tiempo, precisamente por ser eficientes, y las transforma aplicándolas a problemas arquitectónicos modernos. Esa es la razón principal por la que el aspecto de sus construcciones recuerde en ocasiones a formas naturales, ramas, esqueletos, raíces…



En la actualidad, el Diseño busca soluciones geométricas óptimas para dar formas y medidas a objetos que deben cumplir determinadas funciones. En esta búsqueda para dar respuestas a las relaciones formas-funciones surge la Geometría aportando figuras o transformaciones. Pero el diseño no se reduce a la creatividad geométrica, sino que debe conjugar la dimensión geométrica con las consideraciones ergonómicas, económicas, perceptivas, las texturas, los colores, etc. La Geometría cotidiana no es, en consecuencia, un corolario de la Geometría euclídea, sino una componente de un proceso creativo más complejo.

Entre las curvas más relevantes en diseño encontraremos las cónicas, las espirales, la catenaria, las hélices, las sinusoides… Entre las superficies las planas, las cuadráticas y ciertas superficies regladas, mínimas y de revolución. Las formas poliédricas también tienen su papel. Encontramos ejemplos y aplicaciones de todo tipo en nuestro entorno: autopistas (clotoides), pistas de skate y toboganes (clicloides), tendidos eléctricos (catenarias), moléculas del ADN (hélices), arte islámico (mosaicos geométricos), GPS (triangulación), fingers de los aeropuertos (fractales), depósitos de petróleo (esferas y cilindros), étcetera.



Algunos de los aspectos geométricos ligados a la arquitectura y al diseño son:

- Orientación geográfica.
- Representación y modelización geométrica, maquetas.
- Modularidad.
- Proporción.
- Inclinación estructural.
- Fractalidad.
- Acústica.
- Flexibilidad y rigidez (prevención en caso de terremotos).
- Formas poligonales y circulares.
- Curvas y arcos.
- Formas poliédricas.
- Superficies quebradas.
- Formas conoidales y cilíndricas.
- Esferas y paraboloides de revolución.
- Hiperboloides de una hoja.
- Paraboloide hiperbólico.
- Simetría.

CONCLUSIÓN

La geometría es una de las cualidades propias tanto de la Naturaleza como del mundo del Arte por distintas razones, o quizá por la misma. La naturaleza, y el hecho de que estas soluciones geométricas hayan perdurado a lo largo de la historia y de la evolución, han demostrado que es una de las ciencias más eficientes en cuanto a lo estructural y a lo funcional. En el mundo del Diseño Industrial, por ejemplo, se considera que una naranja, la fruta, es el envase de líquido más perfecto del mundo: no tiene coste económico, ya que lo produce la naturaleza, es de forma esférica, lo que le permite albergar el máximo zumo por el espacio que ocupa, contiene dos capas exteriores de un material que amortigua el golpe en caso de caer del árbol y que no se rompa el envase, en su interior, está distribuido por gajos, los mayores con forma de un octavo de circunferencia (lo que produce un octógono perfecto en su corte transversal), y a su vez en mini gajos en forma de prisma piramidal que son los que contiene realmente el jugo de la fruta. La geometría está presente en la naturaleza, y la hace más perfecta.

La presencia de la geometría en el Arte, en el sentido amplio de la palabra, con todas sus manifestaciones es quizá algo distinta pero con la misma consecuencia. Su presencia es más pura, más geométricamente perfecta, si se permite la expresión, y esto ha provocado construcciones sabias a lo largo de la historia, construcciones que han sustentado cada vez más peso con cada vez menos material (como fue el paso del Románico al Gótico), obras más expresivas en su campo y nuevas visiones nunca antes vistas en el mundo de la pintura.

Es, por tanto, una característica muy valiosa en los niveles estético y funcional, que ha aportado soluciones ingeniosas y eficientes, que de cualquier otra manera habría supuesto un problema eminentemente estructural difícil de solucionar. El ser humano ha sabido aprender de las soluciones naturales, ha conseguido apreciarlas, estudiarlas y dominarlas, con el objetivo fundamental de aprovechar las propiedades geométricas para sus creaciones, ya sea el diseño de una vivienda, de un perchero o de una tarjeta de visita.

4.1.4. DESARROLLO HISTÓRICO.

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA

Las principales consideraciones geométricas son muy antiguas y, al parecer, se originaron en observaciones realizadas por el hombre, gracias a su habilidad para reconocer y comparar formas y tamaños.

Muchas circunstancias en la vida humana, aún en la edad primitiva, condujeron a numerosos descubrimientos geométricos: la noción de distancia fue, sin duda alguna, uno de los primeros conceptos geométricos descubiertos; la estimación del tiempo necesario para hacer un viaje condujo, originalmente, a observar que la recta constituye la trayectoria más corta de un punto a otro; incluso, por intuición, la mayoría de los animales se da cuenta de esto. La necesidad de limitar terrenos llevaron al hombre a la noción de figuras geométricas simples, tales como: rectángulos, cuadrados, triángulos. Otros conceptos geométricos elementales, como las nociones de vertical, de rectas paralelas, de rectas perpendiculares, pueden haber sido sugeridos por la construcción de paredes y viviendas primitivas.

También muchas observaciones en la vida diaria pudieron haber conducido a los primeros seres humanos al concepto de curvas, superficies y sólidos. La noción de secciones cónicas: parábolas, elipses, hipérbolas, pudo haber sido insinuada por las sombras producidas por el sol o una antorcha. Los alfareros primitivos hicieron sólidos de revolución. Además, el cuerpo del hombre, de los animales, las flores y las hojas de muchas plantas, las conchas marinas y algunos frutos, sugieren la noción de simetría. La idea de volumen viene de manera casi inmediata, al considerar y fabricar recipientes para contener agua, aceite, cereales y otros alimentos de consumo diario.

El ser humano necesitó contar, y creó los números; quiso hacer cálculos, y definió las operaciones; hizo relaciones, y determinó las propiedades numéricas. Por medio de lo anterior, más el uso de la lógica, obtuvo los instrumentos adecuados para resolver las situaciones problemáticas surgidas a diario. Además de esos requerimientos prácticos, el hombre precisó admirar la belleza de la creación para satisfacer su espíritu. Con ese fin, observó la naturaleza y todo lo que le rodeaba. Así fue ideando conceptos de formas, figuras, cuerpos, líneas, los que dieron origen a la parte de la matemática que designamos con el nombre de geometría.

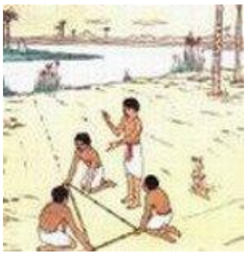
La Geometría es la rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

El río Nilo.

La palabra geometría está formada por las raíces griegas: "geo", tierra, y "metrón", medida, por lo tanto, su significado es "medida de la tierra".

Según todos los indicios, los conceptos geométricos que el hombre ideó para explicar la naturaleza nacieron -de forma práctica- a orillas del río Nilo, en el antiguo Egipto, donde era necesario remarcar los límites de los terrenos ribereños y construir diques paralelos para encauzar sus aguas, debido a los desbordes que causaban las inundaciones periódicas. Pero el verdadero motivo era que las clases altas conocían de esta manera cuánto sembraban sus súbditos para luego saber a cuánto debía ascender el cobro de los impuestos.

Para medir las tierras los egipcios aprendierona a calcular el área de los rectángulos y de los triángulos. Para medir los triángulos usaban cuerdas.



Los babilonios.

Los babilonios también conocían las áreas de los triángulos y los rectángulos, sobre todo para resolver problemas relacionados con herencias: ¿cómo repartir las tierras entre los herederos? También conocieron las áreas de los pentágonos, hexágonos y heptágonos. Pero en especial estudiaron mucho los círculos.

Eran unos excelentes geómetras, ellos bautizaron las doce constelaciones del zodíaco, dividiendo cada una de ellas en 30 partes iguales. Es decir, dividieron el círculo zodiacal en 12 x 30 = 360 partes. Recordemos que ellos crearon el sistema de numeración sexagesimal (de base 60). Este zodíaco les serviría para elaborar calendarios y almanaques, muy útiles para el cultivo de los cereales. Es decir, junto a la geometría nace la astronomía.

De ellos hemos heredado la división de la circunferencia en 360 grados y la de cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Y la patente de nuestra manera de contar el tiempo también es suya.

Mesopotamia.

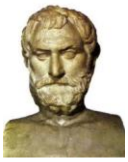
También se tienen nociones geométricas en la civilización mesopotámica, constituyendo los problemas de medida el bloque central en este campo: área del cuadrado, del círculo (con una no muy buena aproximación de Pi=3), volúmenes de determinados cuerpos, semejanza de figuras, e incluso hay autores que afirman que esta civilización conocía el Teorema de Pitágoras aplicado a problemas particulares, aunque no, obviamente, como principio general.

Otras culturas de la Antigüedad.

No se puede decir que la Geometría fuese el punto fuerte de las culturas china e india, limitándose principalmente a la resolución de problemas sobre distancias y semejanzas de cuerpos. También hay quien afirma que estas dos civilizaciones llegaron a enunciados de algunos casos particulares del Teorema de Pitágoras, e incluso que desarrollaron algunas ideas sobre la demostración de este teorema.

Los griegos.

Quienes dieron carácter científico a la geometría fueron los griegos, al incorporar demostraciones basadas en razonamientos.

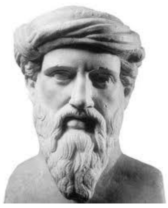


Tales de Mileto inició esta tendencia, al concebir la posibilidad de explicar diferentes principios geométricos a partir de verdades simples y evidentes.

En su juventud viajó a Egipto, donde aprendió geometría de los sacerdotes de Menfis, y astronomía, que posteriormente enseñaría con el nombre de astrosofía. Fue maestro de Pitágoras y Anaxímedes, y contemporáneo de Anaximandro.

Fue el primer filósofo griego que intentó dar una explicación física del Universo, que para él era un espacio racional pese a su aparente desorden. Sin embargo, no buscó un Creador en dicha racionalidad, pues para él todo nacía del agua, la cual era el elemento básico del que estaban hechas todas las cosas. Suponía que la tierra flotaba en un océano infinito.

En geometría, y basándose en los conocimientos adquiridos en Egipto, elaboró un conjunto de teoremas generales y de razonamientos deductivos a partir de estos. Todo ello fue recopilado posteriormente por Euclides en su obra *Elementos*, pero se debe a Tales el mérito de haber introducido en Grecia el interés por los estudios geométricos.

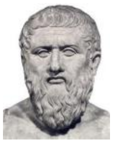


Pitágoras era originario de la isla de Samos, situado en el Mar Egeo. En la época de este filósofo la isla era gobernada por el tirano Polícrates. Como el espíritu libre de Pitágoras no podía avenirse a esta forma de gobierno, emigró hacia el occidente, fundando en Crotona (al sur de Italia) una asociación que no tenía el carácter de una escuela filosófica sino el de una comunidad religiosa. Por este motivo, puede decirse que las ciencias matemáticas han nacido en el mundo griego de una corporación de carácter religioso y moral. Ellos se reunían para efectuar ciertas ceremonias, para ayudarse mutuamente, y aun para vivir en comunidad.

En la Escuela Pitagórica podía ingresar cualquier persona, hasta mujeres. En ese entonces, y durante mucho tiempo y en muchos pueblos, las mujeres no eran admitidas en la escuelas. Se dice que Pitágoras se casó con una de las alumnas: Teano. El símbolo de la Escuela de Pitágoras y por medio del cual se reconocían entre sí, era el pentágono estrellado, que ellos llamaban pentalfa (cinco alfas). En esta Escuela se entraba después de prestarle juramento al número diez, todos los documentos se mantenían de manera oral y nadie podía divulgarlos. Jugaban con piedrecitas y formaban los números cuadrados y los números rectangulares. Pitágoras conoció a Tales de Mileto y fueron amigos.

Para los Pitagóricos, no sólo la tierra era esférica, sino que no ocupaba el centro del universo. La tierra y los planetas giraban -a la vez que el sol- en torno al fuego central o “corazón del Cosmos” (identificado con el número uno). El mundo aspira el aire (lo ilimitado) de la masa sin límites que lo envuelve.

Se debe a Pitágoras el carácter esencialmente deductivo de la Geometría y el encadenamiento lógico de sus proposiciones, cualidades que conservan hasta nuestros días. La base de su filosofía fue la ciencia de los números así como el estudio de la geometría. Pero Pitágoras es famoso por haber descubierto el Teorema que lleva su nombre: el teorema de Pitágoras. ¿En qué consiste este teorema? Simple: los lados de un triángulo rectángulo forman cuadrados. Y si sumamos los cuadrados de los lados menores obtendremos los cuadrados del lado mayor (también conocido como hipotenusa).



Arístocles de Atenas, apodado **Platón** (“el de anchas espaldas”), nace en Atenas, o quizás en Aegina. Pertenecía a una familia noble. Fundó en Atenas la Academia, primera escuela de filosofía organizada, origen de las actuales universidades. Allí permanecerá durante veinte años dedicado al estudio y a la enseñanza.

Hizo colocar, a la entrada de la Academia, su célebre y significativa frase: “*No entre aquí el que no conoce geometría*”, junto con otras proposiciones como “*Los números gobiernan al mundo*”.

Según Platón, el estudio de la Geometría debía empezarse en el orden siguiente:

1.-Definiciones, 2.-Axiomas, 3.- Postulados, 4.- Teoremas.

A esta directiva de Platón se adaptaron los matemáticos posteriores a él, principalmente Euclides.

Los sólidos platónicos, cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos o poliedros de Platón son cuerpos geométricos caracterizados por ser poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras.

Existen cinco sólidos platónicos diferentes:

tetraedro, de cuatro caras triangulares,
hexaedro, o cubo, de seis caras cuadradas,
octaedro, de ocho caras triangulares,
dodecaedro, de doce caras pentagonales, y
icosaedro, de veinte caras triangulares.

Los cinco sólidos platónicos representan la composición y armonía de las cosas. En el Timeo se dice que la Tierra está formada por átomos agrupados en forma de hexaedros; el fuego, de tetraedros, el aire, de octaedros, y el agua, de icosaedros. El universo en su totalidad está figurado en el dodecaedro.

Destaca, igualmente, la figura de **Euclides**. Poco se sabe de este matemático griego, incluso hay quien opina que en realidad nunca existió, sino que sus obras pertenecen a un grupo de matemáticos griegos que se hacía llamar por ese nombre. Se cree que vivió entre los siglos IV y III de antes de nuestra era y que trabajó en la Biblioteca de Alejandría. Su gran mérito consistió en recopilar y sintetizar los conocimientos geométricos de su época.

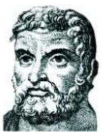
Su libro clave es el llamado *Elementos*, y constaba originalmente de trece volúmenes en los que se exponía la geometría clásica. Este libro tiene tanta importancia para las matemáticas como el Principio de Newton para la Física o el Origen de las Especies de Darwin para la Biología.

Para sentar las bases de la Geometría, Euclides utilizó lo que se llama axiomas, que no son otra cosa que principios fundamentales indemostrables pero que se consideran evidentes, y a partir de los cuales se construye una teoría. Él los llamó postulados y formuló cinco primordiales que se pueden exponer de varias maneras equivalentes, una de las cuales es:

1. Si tenemos dos puntos, entonces podemos dibujar una recta que los une.
2. Cualquier recta se puede hacer todo lo larga que se quiera.
3. Se puede trazar una circunferencia de cualquier tamaño alrededor de cualquier punto.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si tenemos una recta y un punto externo a ella, podremos dibujar todas las rectas que queramos que pasen por ese punto, pero sólo una de ellas será paralela a la que ya teníamos.

Todo esto parece evidente, pero el gran mérito de Euclides fue deducir toda la geometría de su época a partir de estos 5 postulados. Tanto es así, que a la geometría clásica se le llama en su honor Geometría Euclídea o Euclidiana.

El quinto postulado siempre fue polémico, Muchos pensaban que no era un axioma sino un teorema, es decir, parecía que no era tan primordial como los otros y que se podía deducir a partir de los otros cuatro, y durante siglos se intentó hallar la manera de hacerlo. Sin embargo, resultó que no era posible.



Los griegos, y en particular **Apolonio de Perga**, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son fundamentalmente cónicas.

.

Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También elaboró un método para calcular una aproximación del valor de pi, la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre 3 10/70 y 3 10/71.

Geometría analítica.

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media.

El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés **René Descartes**, cuyo tratado *El Discurso del Método*, publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

Otro desarrollo importante del siglo XVII fue la investigación de las propiedades de las figuras geométricas que no varían cuando las figuras son proyectadas de un plano a otro.

Geometrías no euclídea: Geometría Hiperbólica.

Como geometría no euclídea denominamos a aquella que rebate el quinto postulado de Euclides. Es decir, las geometrías no euclídeas se refieren a los modelos en los que el quinto postulado de Euclides se considera falso.

La primera en aparecer fue la Geometría Hiperbólica, a principios del siglo XIX, y de la mano de **Karl Fiedrich Gauss** (el más conocido, fundador junto con Monge y Euler de la Geometría Diferencial, que estudia las propiedades de las curvas y superficies en un punto), aunque también trabajaron sobre esto Lobachevsky y János Bolyai, independientemente. Al negar el quinto postulado de Euclides, en lugar de obtener una contradición o un absurdo, consiguieron una geometría en las que los ángulos de un triángulo sumaban menos de 180º, y vieron que se puede dibujar un número infinito de paralelas a una recta que pasan por un punto exterior a ésta.

El ruso **Nicolai Lobachevski**, quien en 1826 no sólo dijo que el quinto axioma de Euclides no se podía deducir de los otros cuatro, sino que no era tal axioma. Ese axioma se podía sustituir por otro y construir toda una geometría distinta. Sin embargo, la obra de Lovachevski no alcanzó demasiada repercusión más allá de su círculo cercano, en la remota Universidad de Kazán, ciudad perteneciente a la no menos remota república rusa de Tatarstán.

Geometría Riemanniana o Elíptica.

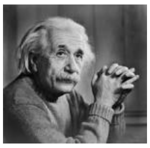
Así, en el siglo XIX, surgieron varias geometrías distintas a la clásica. Incluso un alumno de Gauss, **Georg Bernhard Riemann** elaboró una geometría en la que no hay rectas paralelas, la llamada Geometría Riemanniana o Elíptica, variante de la Geometría Diferencial. Riemann mostró que es posible una geometría en la que no existen líneas paralelas que pasan a una recta.

Puede resultar extraño imaginar geometrías en las que no se cumplan los postulados de Euclides, pero hay un ejemplo que nos puede ayudar a imaginarlo, basta con pensar en una esfera, como puede ser un balón de fútbol o, aproximadamente, nuestro planeta Tierra. Si dibujamos una recta sobre esta esfera, ésta no podrá ser infinita como en un plano, puesto que acabaremos volviendo al mismo punto, y por tanto su tamaño será el del diámetro de la esfera, es decir, que no tendremos rectas en el sentido tradicional, sino que tendremos circunferencias que cumplen la misma función que las rectas en la geometría tradicional.

Este asunto de la esfera se conocía, como es lógico, desde mucho tiempo atrás pero nadie se había puesto a estudiarlo seriamente, se consideraba que sólo eran casos degenerados de geometría euclídea. Sin embargo desde el Siglo XIX se consideran geometrías tan válidas como la clásica, y podemos decir que existen infinitas geometrías posibles, dependiendo de la curvatura de la superficie con la que estemos tratando. La geometría euclídea sólo es el caso particular que se inscribe en un plano, es decir, cuando la curvatura es nula.

La geometría y la relatividad: Albert Einstein.

Recordemos que vivimos en un universo de cuatro dimensiones, las tres espaciales más el tiempo. Este asunto de la curvatura del espacio-tiempo se puede imaginar más fácilmente sobre un supuesto universo de sólo dos dimensiones, es decir un plano, como podría ser un colchón. Si en ese colchón se pone una canica, esta se quedará quieta. Pero si después de la canica ponemos un objeto más pesado, como una bola grande de hierro, esta hundirá (curvará) el colchón de forma que la canica tenderá a acercarse a la bola de hierro. Se puede decir que la curvatura del colchón es un ejemplo en dos dimensiones de cómo la Tierra curva el espacio a su alrededor atrayendo a los objetos. Y fue a encontrar el funcionamiento de este espacio curvo a lo que dedicó **Einstein** ocho años. Las complejas ecuaciones resultantes se podrían resumir así: La curvatura del espacio-tiempo en una zona del universo es igual al contenido de masa y energía de esa región.



La geometría que subyace en esa curvatura no es la de Euclides, sino una no euclidiana que supone consecuencias que nos dan explicaciones distintas para fenómenos que hasta entonces se creían comprendidos. Por ejemplo, los planetas que giran alrededor del Sol en realidad están describiendo una línea recta, pero, como vimos antes, una recta en un espacio no euclidiano es distinta de las rectas de toda la vida.

Los problemas del Futuro: D. Hilbert.

Durante el siglo XIX se puso de manifiesto, cada vez de una manera más evidente, que Euclides no había partido de conceptos patentes y que había supuesto muchas cosas sin especificarlas. Se hicieron esfuerzos para fijar un número mínimo de términos y definiciones básicas sin identificar y de éstas deducir rigurosamente la estructura matemática completa.

Esta es la ciencia axiomática, y fueron Hilbert y Peano quienes la fundaron. **Hilbert** publicó en 1899 *Foundations of Geometry* (*Fundamentos de Geometría*), en la que por primera vez se exponían satisfactoriamente una serie de axiomas de geometría. Hilbert se contentó con probar ciertas propiedades en vez de definirlas. También probó que su sistema de axiomas era bastante completo, algo que los griegos habían admitido de los axiomas de Euclides, pero sin demostrarlo. Así completó el trabajo de Euclides sin efectuar cambios en la esencia, pero su fundamento pasó de intuitivo a lógico.

Es famosa la conferencia que dio en el Congreso Internacional de Matemáticas de París en 1900, de título Problemas matemáticos, en la que proponía una lista de 23 problemas que estaban sin resolver (algunos todavía lo están). Una de estas cuestiones era: ¿son las matemáticas decidibles? es decir, ¿hay un método definido que pueda aplicarse a cualquier sentencia matemática y que nos diga si esa sentencia es cierta o no?. Esta cuestión recibió el nombre de *enstcheidungsproblem* y para resolverla, Alan Turing construyó, en 1936, un modelo formal de computador, la Máquina de Turing, y demostró que había problemas tales que una máquina no podía resolver. Otras dos cuestiones: ¿es la matemática completa?, es decir, ¿puede ser demostrada o refutada cualquier sentencia matemática? y ¿es la matemática consistente?, es decir, ¿es cierto que sentencias tales como 0 = 1 no pueden demostrarse por métodos válidos?. En 1931, Kurt Gödel fue capaz de responder a estas dos preguntas, demostrando que cualquier sistema formal suficientemente potente es inconsistente o incompleto.

Hilbert trabajó sobre los invariantes algebraicos, geometría (su libro *Los fundamentos de la Geometría* es un clásico), ecuaciones integrales, también se dedicó a la Física (decía que la Física es demasiado difícil para los físicos), su libro *Los métodos de la Física matemática*, de Richard Courant y David Hilbert (se conoce como el Courant-Hilbert) se sigue imprimiendo en la actualidad; también trabajo en los fundamentos de las matemáticas y en la lógica matemática.

El epitafio de Hilbert es *"Wir müssen wissen, wir werden wissen"* (*"Debemos saber, de modo que sabremos"*).

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

¿Cuál es el sentido del conocimiento y la enseñanza de la Historia de la Geometría?

Los alumnos de secundaria deben conocer el origen de la Geometría y tener en cuenta que la historia de la Geometría no termina en el siglo XVIII, es decir, no se agota con la Geometría Euclídea.

En este sentido, el conocimiento de las bases históricas de la Geometría en los procesos de enseñanza aprendizaje promueve un cambio de actitud de los alumnos hacia esta parte de las Matemáticas, incentiva la reflexión y una actitud crítica en el estudiante. Es un recurso integrador de la Geometría en otras disciplinas y aumenta el interés y la motivación del alumnado hacia su aprendizaje.

Respecto al profesorado, el conocimiento de la historia de la Geometría, su origen y los cambios sufridos a lo largo del tiempo, conduce a la siguiente reflexión: si la Geometría ha cambiado, forzosamente su enseñanza también debe ser diferente. No podemos enseñar Geometría en el siglo XXI del mismo modo que se enseñaba en el siglo pasado.

Además, un profesor debe saber qué es la Geometría, estudiar su historia, usar diferentes metodologías y estrategias de enseñanza, estudiar el impacto que la Geometría ha tenido, tiene y seguirá teniendo en el desarrollo de nuestra sociedad. Estos son temas que un profesor debe abordar y tales conocimientos pueden ayudarle en su desempeño docente y así incitar la curiosidad de sus alumnos.

4.2. ANÁLISIS COGNITIVO.

4.2.1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE: OBJETIVOS, CAPACIDADES, COMPETENCIAS.

Seleccionado el *objetivo* de aprendizaje que se quiere alcanzar, consistente en este caso la "caracterización y reconocimiento de figuras geométricas planas", se identifican qué *capacidades* pondrán en juego los estudiantes y se determinan a qué *competencias* (PISA) se quiere contribuir.

Véase el siguiente cuadro. Las competencias en las que más se incide (pensar y razonar, argumentar) están sombreadas de color más oscuro, y aquellas en las que menos se incide (resolver problemas, lenguaje simbólico), de color más claro.

Capacidades	Competencias Matemáticas						
	PR	A	C	M	RP	R	LS
1. Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.	x	x				x	
2. Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.	x	x				x	
3. Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.			x			x	x
4. Conocer los criterios de clasificación de las figuras.		x					
5. Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.	x	x	x				
6. Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.	x			x	x	x	
7. Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.	x		x	x			
8. Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.		x		x		x	
9. Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.	x	x	x	x		x	
10. Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.	x	x	x	x	x		

PR: Pensar y razonar - A: Argumentar - C: Comunicar - M: Modelizar - RP: Resolver problemas - R: Representar - LS: Lenguaje simbólico

4.2.2. ERRORES Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE.

4.2.2.1. ERRORES Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE EN GEOMETRÍA.

En las enseñanzas de tendencia tradicional y en los libros de textos es frecuente encontrarse con ciertos estilos generalizados sobre las figuras y los conceptos geométricos, que crean esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente. Dichos estilos obstaculizan los proceso de abstracción y la agilidad en el manejo de ideas y contenidos.

Así, los errores que comenten los alumnos han dejado de ser elementos sancionables o incapacidades carentes de interés y que había que ignorar hasta que se corrigieran por sí solos, sino que constituyen un elemento más de los procesos de aprendizaje.

Es notorio que algunos estudiantes muestran errores que no evolucionan ni son corregidos durante los distintos niveles educativos. Estos errores suelen perdurar durante toda su formación académica incluso son detectados en su formación de maestros por lo que si no son subsanados pueden ser transmitidos a sus futuros alumnos. También ha sido probada la resistencia que los estudiantes para maestro ponen para eliminar los errores, incluso después de comprobar su falsedad, lo que muestra su profunda interiorización de la que se ven influidas sus concepciones

Se considera, por tanto, que hacer surgir y conocer los errores ayuda a captar sus concepciones, la forma en que los estudiantes de Primaria y Secundaria aprenden o han aprendido, y las dificultades con las que se encuentran en la realización de tareas. Este conocimiento es eficaz para los profesores pues constituye un modelo para la reflexión que le ayuda a desarrollar una enseñanza y un aprendizaje más significativos.

Errores y esquemas conceptuales.

Los alumnos de Primaria y Secundaria desarrollan esquemas conceptuales incompletos o mal construidos sobre los conceptos, propiedades y clasificación de las figuras geométricas tanto planas como espaciales, lo que impide un eficaz proceso de su enseñanza y aprendizaje.

Algunos errores sobre la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas pueden haber sido generados en el mismo proceso de aprendizaje de las figuras. Estos errores, en la enseñanza de la geometría, son causados muchas veces por una utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno.

En primer lugar tenemos que preguntarnos qué ocurre en la mente de los alumnos cuando una vez que se supone que el concepto ha sido adquirido se les pide que identifiquen o construyan ejemplos. La identificación o construcción de ejemplos de un concepto supone que hay que hay tener en cuenta la imagen del concepto (el reflejo en la mente del alumno) y la definición del concepto (verbal) así como aquellas operaciones mentales (ej.: esquemas lógicos) o físicas (ej.: giros de la figura) en las que una comparación con el dibujo mental sea más fácil. *Vinner* (1991) habla de esquema conceptual como aquello que se presenta en la mente cuando se nombra el concepto, es decir, la estructura cognitiva de un estudiante asociada a un concepto matemático estaría formada por la imágenes mentales que fruto de la experiencia, en la que se interiorizan propiedades y se desarrollan procedimientos, ha asociado con dicho concepto.

Así pues, comprender significa tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias…

La simbología visual del concepto.

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría de tendencia tradicional, en la que ya hemos dicho no se suelen utilizar materiales o recursos distintos al libro de texto, las imágenes juegan un papel muy importante en su enseñanza.

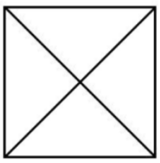


Figura 1

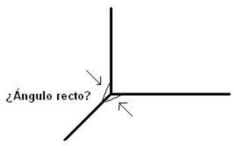


Figura 2

En estas figuras, a veces, no se presta atención a la simbología del lenguaje visual de forma que el profesor y el alumno interpretan cosas distintas sobre un dibujo, sobre todo si es representación plana de una figura tridimensional. Así, el dibujo de la figura 1 puede ser interpretado como una pirámide cuadrada, una bipirámide cuadrada o un cuadrado y sus diagonales. Otras veces los alumnos no son capaces de ver en el plano ángulos rectos por su falta de dominio del sistema de representación en el que están construidas las figuras (figura 2). Dichos libros de textos presentan las distintas figuras geométricas mediante un único dibujo o un número tan pequeño de ellos que el alumno construye esquemas conceptuales estándar sobre ellas (cuadriláteros, prismas, etc) que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto.

Así, los alumnos presentan serias dificultades para representar en el plano cuerpos geométricos (por ejemplo: cubos o pirámides). Estas dificultades también se reflejan en actividades en las que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar. Las distintas representaciones en el plano de cuerpos geométricos influyen en las concepciones que tienen los alumnos en cuanto al espacio.

Las tareas de los profesores y los libros de textos es posible que incluyan representaciones que los alumnos interpreten de maneras distintas debido a que el paso del espacio al plano admite varias posibilidades como en los casos anteriores.

Los distractores de orientación.

Para Hershkowitz (1990), el concepto se deriva de su definición matemática, por ello, tiene atributos relevantes críticos que son los adecuados para ser ejemplo del concepto, y atributo no críticos que son los que sólo poseen algunos ejemplos. Los alumnos comienzan por tener una imagen del concepto muy amplia que da lugar a ejemplos estándares que mejoran con la práctica (procesos visuales o analíticos) de los que se obtienen ejemplos más críticos y analíticos.

Sin embargo, ciertos atributos irrelevantes tienen fuertes características visuales y actúan como distractores. Uno de los distractores más conocidos son los distractores de orientación (Vinner y Hershkowitz, 1983) que se refieren a aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto.

En el tema de ángulos podemos observar como éstos suelen ser presentados con un lado horizontal paralelo al borde inferior del libro. Los alumnos incluyen en su esquema conceptual de ángulo dicho atributo de forma que consideran que siempre tienen que dibujarlos con un lado horizontal, sobre todo el ángulo obtuso (figura 3).

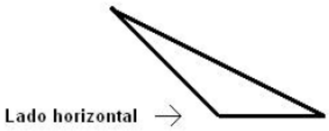


Figura 3

El paralelismo de la figura con los lados de libro o del folio se acusa mayoritariamente cuando se trazan rectas perpendiculares o paralelas que se dibujan siempre siguiendo la dirección de estos lados. Igualmente ocurre con la construcción del triángulo rectángulo que se presenta apoyado sobre el vértice del ángulo recto o los rombos apoyados siempre en un vértice (figura 4).

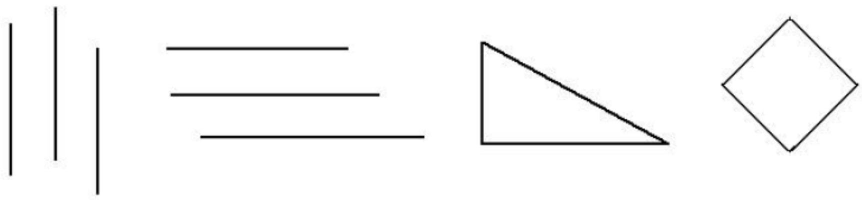


Figura 4

Así, los alumnos pueden no interiorizar como ejemplos también válidos las rectas perpendiculares no paralelas a los bordes del libro, triángulos rectos colocados en otras orientaciones o rombos apoyados en uno de sus lados (figura 5).

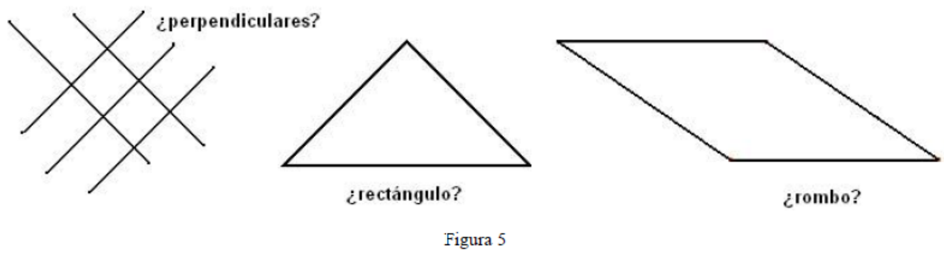


Figura 5

La orientación de los sólidos apoyados siempre sobre la base forma también en los alumnos imágenes mentales que hacen que no identifiquen como prismas aquellos que están apoyados sobre una cara lateral o como cubos los apoyados sobre un vértice (figura 6).

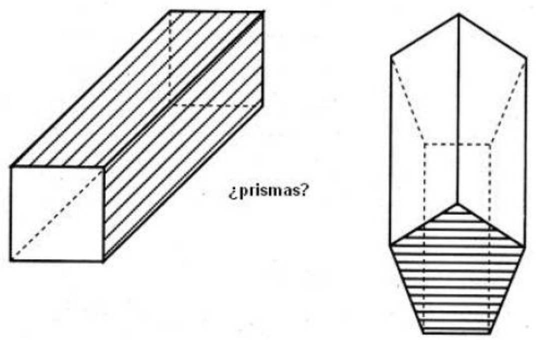


Figura 6

Errores comunes en los alumnos son considerar que la base es la cara en la que apoyan los objetos o que la base no es una cara, sobre todo en figuras como los prismas y las pirámides donde solo consideran las laterales como caras de la figuras. Se observa como los libros de texto contribuyen a esa imagen del concepto debido a la importancia que se le da a la base como objeto clasificador. Por ejemplo, la base determina el nombre de los prismas y si el prisma es regular o no.

Los distractores de estructuración.

Algunas dificultades de tipo visual tienen su causa, principalmente, en los prototipos. Estos ejemplos especiales a los que se recurre intentan modelizar el concepto que se quiere estudiar. Si bien es necesario su uso, se presentan ventajas y desventajas. Estos ejemplos pueden transformarse en obstáculos para la construcción del concepto. Los prototipos ofrecen una visión más o menos completa del concepto, el riesgo que se corre es considerar a los mismos como único ejemplo válido del objeto tratado, si no se logra una apropiada abstracción de las características del objeto matemático que se está construyendo.

Así pues, puede ocurrir que los esquemas mentales se presentan incompletos debido a los distractores de estructuración, es decir, a una presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos, probablemente sin intención. A veces los alumnos tienen ideas erróneas que se desarrollan con el proceso de aprendizaje y que tienen incidencia durante varios cursos. Un ejemplo alusivo a estos distractores es la presentación de los triángulos isósceles con los lados iguales siempre más grandes que el lado desigual y siempre apoyado sobre este lado (figura 7).

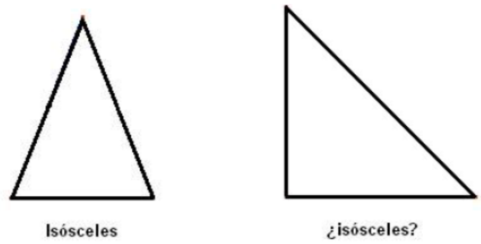


Figura 7

También el estudio de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices presupone que todas son siempre interiores al triángulo, así la dificultad de los alumnos para trazar alturas a los lados de un triángulo obtusángulo o el caso del triángulo rectángulo en el que dos alturas coinciden con los lados (la base es siempre uno de los catetos, desiguales entre sí). Es interesante observar como en el trazado de alturas el alumno puede busca también la vertical paralela al borde del libro más que la perpendicular a la base (figura 8). Muchos libros de textos incluyen ejemplos en los que las alturas de los triángulos siempre presentan esta orientación, es decir, son paralelas al borde del libro.

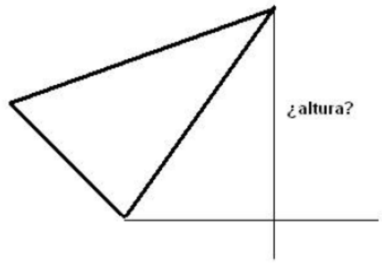


Figura 8

La presentación constante de esta altura estándar paralela al borde, siempre única, tanto en la definición como en las actividades de medida, teorema de Pitágoras, etc. hace también que los alumnos conciban la existencia de una sola altura en los triángulos. Así, cuando se les pide trazar las alturas de un triángulo solo trazan esta altura estándar, podemos observar como los alumnos desconocen que existen otras alturas o tienen dificultad para trazar otras alturas que no sean la estándar. Esto hace que les sea dificultoso trabajar en las actividades con alturas no estándar.

Es característico observar también la escasez de figuras planas o sólidos de forma cóncava en las imágenes que recibe el alumno durante la enseñanza de la geometría, bien en Primaria o en Secundaria. Esto hace que no sean capaces de identificarlas ni de clasificarlas. Los alumnos conciben que solamente existan figuras y sólidos convexos. Igualmente ocurre con los trapecios en las clasificaciones de polígonos de la geometría plana. La imagen tan pobre que los alumnos reciben de estos polígonos hace que los alumnos no los consideren en la clasificación de cuadriláteros.

Otros ejemplos clásicos que ilustran los distractores de estructuración son el cuadrado siempre apoyado sobre uno de sus lados, el cubo de la misma forma que el cuadrado, la pirámide de base cuadrada siempre apoyada sobre dicha base, etc.

<u>Los nombres.</u>

El estudio de *Medici y otros* (1986) apunta el error que se comete al considerar como figuras geométricas solamente aquellas que tienen un nombre común oficial pues se hace demasiada insistencia sobre la nomenclatura tradicional.

De acuerdo con este estudio, se ha constatado cómo los alumnos identifican más fácilmente como polígonos o como sólidos aquellos que conocen su nombre como cuadrado o pentágono, o poliedro y cilindro. Éstos sienten bastante reticencia a identificar, por ejemplo, como polígonos a aquellos que tienen más de diez lados pues no tienen un nombre común.

Estos autores señalan también el error que origina el confundir conceptos colectivos y conceptos individuales. Muchas veces el profesor se expresa de forma general hablando del cuadrado o del círculo como si no existieran las figuras individuales sino solamente un arquetipo.

También con respecto a la nomenclatura, en la mayoría de los textos se presentan nombres como el trapezoide para un cuadrilátero convexo sin lados opuestos paralelos o el de romboide para un paralelogramo no equilátero ni equiángulo.

Estas nomenclaturas son redundantes pues estas figuras planas quedarían siempre nombradas como cuadriláteros o paralelogramos respectivamente sin necesidad de añadirles un nuevo nombre. No merece la pena dar nombre a las figuras por las características que no tienen ya que normalmente se atiende más a las cualidades que poseen que a las que carecen (*Mora*, 1995).

<u>Las imágenes reales del concepto.</u>

En el aprendizaje de las figuras geométricas tenemos que tener también en cuenta otros obstáculos como los que *Mesquita* (1992) llama doble estatus de los objetos geométricos, es decir, todo aquello que se apoya en objetos generales y abstractos que no puede ser expresado más que por una configuración específica que implica objetos concretos y particulares. Los conceptos en Geometría son distintos de sus representaciones externas por lo que son difícilmente disociables de ellas. Esta ambigüedad, aunque no la perciba el alumno, puede ser una fuente de conflictos para los alumnos que se enfrentan con un problema geométrico. En la Geometría se habla de abstracciones mientras los niños encuentran en las habitaciones objetos reales que solamente se asemejan a esos objetos ideales geométricos (*De la Torre*, 1998).

A la complicación que supone el separar el objeto abstracto del real se añade otras veces la presentación en los libros de textos de fotografías que no son muy adecuadas para una primera presentación del sólido correspondiente. Así observamos caramelos de palo, además con superficie rugosa e irregular, como ejemplo de esfera, botes de bebidas con extremos curvados como ejemplos de cilindros, o jabones con formas redondeadas y con huecos como ejemplos de prismas. Un ejemplo también poco cercano al niño es presentar como primera pirámide una fotografía de las pirámides de Egipto que no están en planos principales y que no pueden formar una imagen mental adecuada al concepto.

Incluso los estudiantes para maestros identifican vasos como cilindros, o tiendas canadienses como prismas triangulares o sombrillas con lados curvos como octógonos lo que muestra la poca rigurosidad de los esquemas mentales construidos sobre esos conceptos.

Las definiciones.

Otro problema importante que hay que tener en cuenta en la enseñanza-aprendizaje de la geometría son las definiciones de los conceptos. *Gutiérrez y Jaime* (1996) apunta cómo los maestros y los libros de texto presentan los conceptos de Geometría elemental de dos formas distintas: o bien mediante el enunciado de la definición, ejercicios de memorización y reconocimientos de algunas figuras concretas, o bien presentando primeramente ejemplos de figuras, describiendo sus características para pasar a definirlas, realizar ejercicios memorísticos de la definición así como actividades de reconocimiento de otras figuras.

Ambas metodologías ponen el acento en las definiciones más que en los ejemplos que son los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo (*Gutiérrez y Jaime*, 1996). Debido a estas metodologías los alumnos memorizan las definiciones cuando el maestro les pregunta pero no las utilizan para resolver las actividades que se le plantean, pues carecen de una imagen conceptual correcta (*Vinner*, 1991). Esta forma de actuar hace que se formen alumnos que conocen los conceptos geométricos de forma teórica pero poco práctica, incapaces de afrontar los problemas geométricos que se le plantean o se le plantearán en su vida cotidiana.

Esta importancia de las definiciones se ve agravada debido a los errores que sobre éstas presentan los libros de textos. Así ciertos objetos geométricos pueden ser definidos de formas diferentes y llevar a los alumnos a graves confusiones. Por ejemplo, las definiciones de los elementos notables de un triángulo como alturas o medianas tienen dos acepciones: bien como segmentos (en textos de Primaria) o bien como rectas (textos de E.S.O.). Si nos fijamos, por ejemplo, en las alturas y las definimos como rectas, cuando el alumno trabaja el tema de medida tiene que dar valores finitos a las alturas que aparecen en los problemas que se le plantean. Esto lleva a contradicción en la construcción del esquema conceptual del alumno referente a la altura pues, por una parte se considera una recta ilimitada y por otra podemos medirla en metros y obtener un resultado finito. Sin embargo, si las definimos como segmentos no podríamos deducir la propiedad de que las tres alturas se cortan en un punto, ya que para el caso del triángulo obtuso no se cumpliría (figura 9).

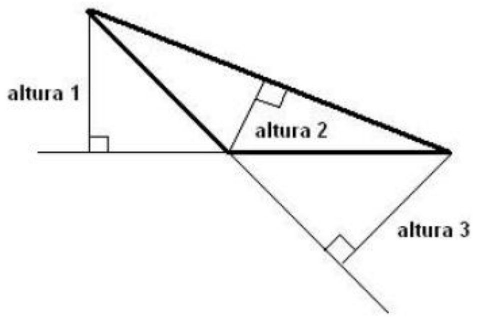


Figura 9

Los errores pueden también pueden ser ocasionados por las interpretaciones distintas que se le pueden dar a la misma expresión gramatical. Así, la definición de triángulo isósceles como el triángulo que tiene dos lados iguales puede ser interpretada como que dos lados son iguales y uno desigual o bien que tiene dos lados iguales y el otro puede ser desigual o no. En esta ultima definición, el triángulo equilátero se podría incluir como isósceles pero no sería así en la primera interpretación. Por tanto, distintas interpretaciones de la misma expresión gramatical puede llevar a los alumnos a clasificar un mismo conjunto de elementos geométricos en diferentes familias de polígonos.

Las clasificaciones.

Un problema que se plantea desde la Primaria y que los alumnos arrastran hasta la universidad, en particular los estudiantes para maestros, es la clasificación de las formas planas, tanto de triángulos como de cuadriláteros. Las confusiones que los alumnos tienen sobre estas clasificaciones hace que les sea imposible clasificar otros conjuntos donde repercuten éstas como es la clasificación de los sóidos, en particular en el caso de los paralelepípedos.

Dentro de los tipos de clasificaciones que distingue *De Villiers* (1994) nos fijamos en la clasificación por particiones y en la clasificación por inclusiones o jerárquica. En Primaria a partir de las definiciones que se dan en los libros de textos se clasifican los triángulos y los cuadriláteros en particiones. Así aparece la definición de isósceles como el triángulo que tiene sólo dos lados iguales o también como el que tiene dos lados iguales y uno desigual. Estas definiciones predispone a una clasificación por partición de los triángulos en: escalenos, isósceles y equiláteros que es la que los maestros enseñan en Primaria. Sin embargo, en 2º de E.S.O. encontramos la definición de triángulo isósceles como el que tiene dos lados iguales al menos lo que presupone una clasificación por inclusión en la que el triángulo equilátero es un subconjunto de los triángulos isósceles y éstos de los triángulos en general (figura 10).

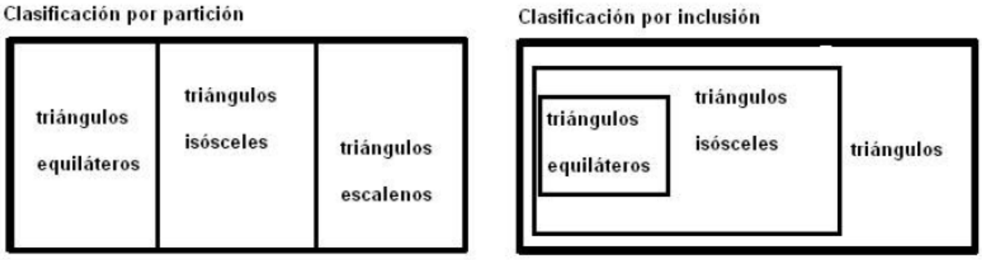


Figura 10

Igualmente ocurre con los cuadriláteros que son clasificados en Primaria como clases disjuntas en las que el rectángulo, el cuadrado y el rombo pertenecen a clases distintas.

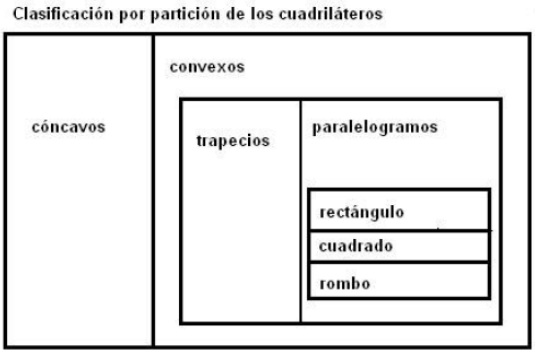


Figura 11

Posteriormente en Secundaria y en la formación de maestros se clasifican por inclusión. Así, a partir de las definiciones que se dan en la figura 12, los alumnos tienen serias dificultades para admitir que el cuadrado pertenece a la familia de los rombos o a la familia de los rectángulos, incluso después de entender perfectamente las propiedades que corresponden a cada figura.

Definiciones

Los cuadriláteros pueden ser cóncavos y convexos

En el conjunto de los convexos encontramos

Paralelogramos : Dos pares de lados paralelos

Rectángulos: cuadriláteros, parelelogramo,equiángulo.
Cuadrados:cuadriláteros, parelelogramo,equiángulo, equilátero
Rombos:cuadriláteros, parelelogramo,equilátero.

Trapecios :Un par de lados paralelos.

Figura 12

De igual forma les cuesta trabajo admitir que los paralelogramos están incluidos en el conjunto de los trapecios, incluso entendiendo que si los paralelogramos tienen dos pares de lados paralelos entonces tienen también uno (figura 13).

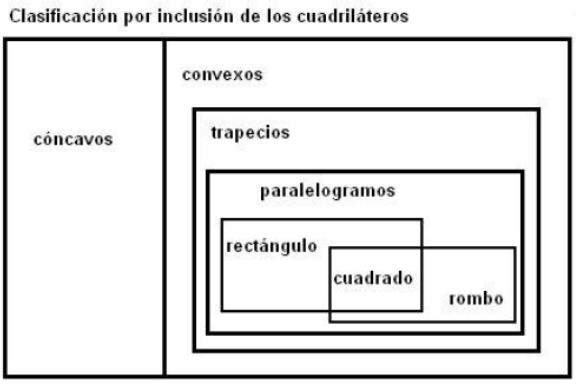


Figura 13

La falta de criterios claros de clasificación de las figuras planas hace que los alumnos manifiesten serias dificultades en la clasificación de sólidos. Un ejemplo claro es la clasificación de los paralelepípedos y, por el mismo motivo que con el cuadrado, la inclusión del cubo en la familia de los romboedros o los ortoedros.

Las imágenes conceptuales y las definiciones de los alumnos en el segundo nivel de Van Hiele (Primaria) están muy arraigadas, de forma que las nuevas definiciones que implican un cambio de imagen conceptual no son admitidas incluso cuando alcanzan el tercer nivel debido a que no hay atenciones de alerta ni por parte del libro, ni del profesor, que les adviertan del cambio de definiciones (*Jaime, Chapa y Gutiérrez*,1992). Los alumnos llegan a su formación como maestros admitiendo solamente la ordenación por partición y mostrando grandes recelos sobre la ordenación por inclusión. Estos cambios originan muchas confusiones en los alumnos que incluso pueden generar concepciones y actitudes de rechazo hacia la Geometría.

Traducción entre distintos tipos de representaciones: verbal, simbólica, gráfica.

El término obstáculo se utiliza como sinónimo de dificultad, mientras que un problema es una cuestión por resolver; los errores son trasgresiones a las normas establecidas por convenciones previas para el uso del lenguaje matemático.

En los problemas en los que se pide al estudiante traducir el planteamiento verbal de una proposición a sus correspondientes representaciones simbólica y gráfica, los principales obstáculos y errores encontrados son:

- Relacionados con la representación de objetos a partir de enunciados matemáticos.
- Deductivos.
- Axiomáticos o de aplicación de la teoría (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución.

Estos no son excluyentes entre sí, ya que un error de un tipo puede tener consecuencias en los otros dos.

Se encuentran mayor cantidad y variedad de errores en la representación simbólica de cada problema que en su correspondiente representación gráfica. Una posible razón de ello es que el código de la representación gráfica es más flexible que los códigos simbólico y verbal.

Así pues, se detectan dificultades al tener que presentar explicaciones y argumentaciones sobre conceptos geométricos o soluciones a problemas, es decir, dificultades referidas a la comprensión del lenguaje matemático mismo, como reconocer términos propios de la materia, usar distintas notaciones, símbolos, etc. Sin embargo, las mayores dificultades se presentan al intentar describir y argumentar las características de los cuerpos y figuras geométricas y cómo pueden obtenerse.

Conclusiones.

El interés de comentar los distintos errores que se prevén en la enseñanza-aprendizaje de geometría, no es otro que mostrar a los profesores de los distintos niveles una fuente de información de lo que pueden haber aprendido sus alumnos y cómo lo han aprendido.

Es notorio como en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, se fuerzan los tiempos de la conceptualización y se introducen muy pronto los conceptos abstractos, obviando la realización de actividades concretas como consecuencia de esa utilización temprana de la nomenclatura definitiva.

En la enseñanza-aprendizaje de la geometría los profesores deben detenerse más en el mundo de las figuras realizando actividades de interdisciplinariedad con otras materias como el Arte. Es necesario aumentar el número de actividades de laboratorio en las que los conceptos y propiedades de las figuras geométricas se manipulen o realizar investigaciones y proyectos de estudios de las figuras geométricas (*Barrantes*, 1998). Estas actividades deben incluir tareas de orientación de las figuras, de estructuración y de las distintas representaciones de una figura en el plano (*Gracia*, 95), así como reflexiones o debates sobre los nombres de las figuras, la relación imagen real y concepto...

Por otra parte, como hemos comentado, las definiciones de los libros de textos crean un problema en el aprendizaje (*Azcárate*, 1997). Los libros de textos y los profesores parten de que los esquemas conceptuales se construyen a partir de las definiciones y por tanto en la resolución de problemas y actividades es la definición la que se activa en la mente del alumno y la que domina el proceso. Esto produce la incapacidad del alumno de resolver situaciones cotidianas. Por ello, el esquema conceptual se construirá a partir de la experiencia del alumno, a partir de situaciones muy variadas y sin necesidad de recurrir en un principio a la definición.

Es esencial que los profesores presten principal atención a las definiciones, propiedades, a las imágenes visuales y reales de los conceptos que trabajan con los alumnos. Deben recordar permanentemente que los conceptos fundamentales en los distintos lenguajes (verbal o gráfico) pueden esconder objetos mentales distintos a los que piensan, produciéndose una falta de entendimiento entre el discurso como profesor y el conocimiento del alumno. Esta especial atención nos hará descubrir, cuando los alumnos realicen tareas, si su esquema conceptual es incompleto o mal construido y nos dará oportunidad para modificarlo.

En cualquier caso, para modelizar conceptos geométricos es importante:

- trabajar sobre las definiciones de los mismos,
- dar gran cantidad de ejemplos,
- efectuar descripciones verbales de los objetos definidos.

También, los profesores tienen que especificar a sus alumnos el cambio de definiciones y clasificaciones que se produce al pasar de Primaria en donde, de acuerdo con los niveles de Van Hiele, los alumnos clasifican por particiones a las etapas posteriores en las que, el paso al tercer nivel, permiten otras clasificaciones como la inclusión.

Igualmente, es conveniente que las reglas para la notación simbólica de la Geometría Euclideana se presenten asociadas a definiciones, propiedades, axiomas y postulados que les den sentido. Los conceptos básicos deben mostrarse tanto en forma verbal como en sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica para propiciar un mejor aprendizaje de los mismos y del lenguaje matemático. Por ejemplo, en el caso de las reglas para simbolizar recta, rayo, segmento y longitud, conviene presentar una secuencia que agrupe todas las variables cuya representación simbólica incluye un par de puntos y poner el énfasis en la variación del significado según el diacrítico utilizado (↔, →, ─) o la ausencia del mismo.

Entre los problemas detectados en la formación de maestros observamos como la inclusión del cuadrado como rectángulo o como rombo tiene bastante dificultad. Siguiendo a *De Villiers* (1994) hemos obtenido resultados favorables utilizando la palabra especial afirmando que un cuadrado es un rectángulo especial. Los alumnos suelen tener problemas de considerar el cuadrado como rectángulo pues en ugar de fijarse en las definiciones recurren a su imagen mental de las figuras en las que no se admite en ningún caso que un cuadrado sea igual a un rectángulo. Con respecto a la inclusión del cuadrado en las familias de los rombos ayuda también bastante la utilización de programas dinámicos de Geometría (Cabri en sus distintas versiones u otros) y los materiales dinámicos como los mecanos (*Mora*, 1995) con los que podemos observar mediante movimientos como cada cuadrado pertenece a la familia de todos los rombos que tienen los mismos lados. La geometría dinámica permite que los alumnos prueben las nuevas ideas, las examinen y las interioricen produciéndose las modificaciones necesarias.

Sin embargo, es preciso que observemos que los errores considerados no se deban a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de la memoria sino a errores que sean persistentes y reproducibles. A veces, podemos pensar que el alumno ha rebasado un error y sin embargo se vuelve a presentar en otras actividades con el consiguiente desencanto del profesor. Por tanto, no basta con advertir al alumno de su error sobre determinado tópico dándole una explicación, sino que debemos desarrollar un proceso continuo ya que no se puede sustituir una concepción antigua por otra nueva de una forma radical.

Esta metodología constructivista hace que los alumnos se enfrenten a sus propios errores mediante tareas en las que necesiten comprobar y reflexionar. Debemos provocar conflictos en sus mentes que verifiquen la inconsistencia de sus ideas frente a los distintos errores. Así estaremos en el camino de conseguir una mejora del conocimiento de las concepciones que los alumnos tienen sobre las figuras geométricas y todos los tópicos relacionados con ellas.

4.2.2.2. ERRORES Y DIFICULTADES EN RELACIÓN CON LAS CAPACIDADES.

A continuación se detallan los <u>errores y dificultades</u> previstos en los estudiantes a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje, puestos en relación con las capacidades que tendrán que desarrollar para alcanzar el objetivo de aprendizaje seleccionado, "caracterización y reconocimiento de figuras geométricas planas":

- Errores de interpretación de representaciones gráficas y simbólicas por falta de dominio del sistema de representación. (**C1**, **C2**, **C3**, **C6**)

- Dificultades en la traducción entre los distintos sistemas de representación: verbal, simbólico, gráfico, figurativo. (**C1**, **C3**, **C5**, **C6**, **C7**, **C8**, **C9**)

- Dificultades para distinguir entre el concepto abstracto y las aproximaciones reales imperfectas del mismo. (**C1**, **C3**, **C6**, **C7**, **C8**, **C10**)

- En el aprendizaje basado en definiciones, incapacidad de aplicar lo teórico a lo práctico, ya que para un mismo concepto puede haber diversas definiciones, y para una misma definición, pueden realizarse distintas interpretaciones. (**C1**, **C2**, **C4**, **C5**, **C6**, **C7**, **C8**, **C9**, **C10**)

- Confusiones derivadas de modelos de clasificación partitivos frente a modelos inclusivos. (**C4**, **C5**)

- Por distractores estructurales y de orientación, dificultad para reconocer:

    - triángulos y cuadrados que no tienen su base paralela al borde del papel,
    - rectas perpendiculares no paralelas a los bordes del folio,
    - triángulos rectángulos no apoyados en uno de sus catetos,
    - rombos apoyados sobre uno de sus lados,
    - triángulos isósceles cuyos lados iguales son más pequeños que el lado desigual, o están apoyados en uno de los lados iguales,
    - alturas en triángulos obtusángulos o rectos,
    - figuras planas cóncavas.

    (**C1**, **C2**, **C5**, **C7**)

Capacidades:

C1. Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en representaciones gráficas y figurativas.
C2. Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.
C3. Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.
C4. Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
C5. Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.
C6. Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.
C7. Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
C8. Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.
C9. Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
C10. Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.

4.2.3. CAMINOS DE APRENDIZAJE.

Según la teoría, haciendo un doble análisis, por una parte de los conocimientos previos de nuestros estudiantes y de su modo de actuar ante un problema y, por otra parte, de los caminos de aprendizaje que siguieron otros estudiantes al realizar estas mismas actividades durante experiencias anteriores, se puede establecer una conjetura de camino de aprendizaje para el objetivo de aprendizaje que hemos tomado.

En este estudio, debido al corto periodo de tiempo en el que se desarrollan las prácticas, y al hecho de que son una experiencia puntual, no tenemos conocimientos previos en este sentido, ya que no ha habido experiencias anteriores. No obstante, se estima que el camino de aprendizaje del objetivo “caracterización y reconocimiento de figuras geométricas planas”, podría ser:

C7 - C1 - C6 - C2 - C3 - C4 - C5 - C10 - C9 - C8

El camino de aprendizaje propuesto hace un doble recorrido deductivo – inductivo, ya que transcurre desde lo general (situaciones, contextos) a lo particular (notaciones, elementos), para después volver a lo general (clasificaciones, aplicaciones).

Retomaremos el estudio de los caminos de aprendizaje en el Análisis de Actuación, donde compararemos esta previsión con los resultados obtenidos después de poner en práctica la secuencia didáctica diseñada en el Análisis de Instrucción.

4.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.

Tras los análisis de contenido y de instrucción llevados a cabo, y teniendo en cuenta los errores y dificultades detectados, se diseñan las tareas, orientadas a la consecución de las capacidades y al desarrollo de las competencias relacionadas con las mismas. Para esta planificación se ha elegido una única tarea - “Proyecto Collage” - que desarrolla todos los objetivos expuestos anteriormente.

4.3.1. METODOLOGÍA.

La presente propuesta pedagógica está elaborada desde una fundamentación constructivista, y como tal, está basada en los siguientes pilares:

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: Debe existir una conexión entre el material nuevo y los contenidos y conocimientos que el alumno/a ya tiene. Esto requiere conocer la situación de partida de cada uno ante cualquier situación de enseñanza-aprendizaje y realizar un seguimiento individualizado durante el transcurso de las sesiones.

APRENDIZAJE FUNCIONAL: Tanto la metodología como los contenidos deben ser necesarios, útiles y atractivos para el alumnado, y deben suscitar su interés por la materia. Para conseguir dicho objetivo hemos de tener muy en cuenta el tipo de alumnado al que va destinado la programación, sus capacidades y sus intereses, así como sus aficiones y aspiraciones, para tratar de buscar aplicaciones prácticas reales y cercanas al estudiante.

APRENDIZAJE EFECTIVO: El alumnado debe adoptar un papel activo en su aprendizaje: hacer actividades, tareas, resolver problemas, vivir situaciones, etc. Debemos crear un entorno motivador donde tenga acceso a la información requerida para sus propósitos y libertad para explorar, investigar y razonar. Por este motivo, han de resaltarse las actitudes positivas que surjan entre el alumnado e introducir un clima adecuado de trabajo que facilite las relaciones de comunicación entre los propios alumnos y entre el profesor y el grupo.

APRENDIZAJE AUTÓNOMO: La intervención didáctica debe tener como objetivo el que los alumnos/as realicen aprendizajes significativos por sí solos. Esto significa que aprendan a aprender y sean motores de su propio aprendizaje. El alumno/a ha de aprender a razonar, a investigar y a pensar por sí mismo. Debe ser consciente de sus capacidades y habilidades, y debe poder conocerse, autoevaluarse y desarrollarse. En este sentido, el papel del profesor se amplía por tanto del de mero enseñante al de orientador y promotor de nuevas estrategias de aprendizaje.

MODELO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO: La asignatura de Matemáticas ha de servir como instrumento para desarrollar en el alumno/a un *"pensamiento científico"*, de forma que pueda desarrollar sus propias hipótesis, plantear sus propios problemas y resolverlos de manera lógica y ordenada en los procedimientos. Por ello, es importante que los alumnos desarrollen una actitud crítica y autónoma ante la resolución de problemas, adquieran hábitos propios de la actividad matemática y sepan aprender de sus propios errores.

4.3.1.1. PRINCIPIOS METODOLÓGICOS GENERALES.

Para llevar a cabo una metodología de trabajo basada en estos pilares, es fundamental establecer unos principios metodológicos que constituyan un conjunto coherente para guiar el proceso de enseñanza y la práctica docente. Algunos de estos principios, incluidos en las programaciones del Área Científico-Tecnológica y del Departamento de Matemáticas del IES Celia Viñas, son:

- Partir de los conocimientos previos de los alumnos/as: Dedicaremos tiempo a observar *qué conocen* y reforzar lo que sea necesario para garantizar la adquisición de nuevos conocimientos.

- Crear un clima adecuado de trabajo y comunicación: Se fomentará la participación de los alumnos/as en la dinámica de clase escuchando sus opiniones y sugerencias y potenciando el *diálogo*, los *debates*, la *confrontación de ideas e hipótesis,* la *resolución conjunta de problemas*, *preguntas abiertas*, *salir a la pizarra*, *búsqueda de ejemplos*, etc.

- Suscitar el interés y mantener la motivación del alumnado: Hemos de conseguir en todo momento generar una expectación respecto a lo que se está estudiando. Para ello, utilizaremos técnicas como:

. Guión, esquema o mapa conceptual que facilite al alumnado el análisis y estructuración del tema, los objetivos y capacidades que se espera alcancen y cómo van a ser evaluados.

. Trabajar habitualmente con **situaciones reales,** utilizando *ejemplos* y *actividades* fácilmente identificables para el alumno/a, donde pueda encontrar **aplicaciones cercanas** de lo estudiado. Se intenta conectar con sus intereses y necesidades ofreciendo una **finalidad atractiva** y una **utilidad clara** de aplicación de los nuevos aprendizajes.

. Utilizar **gran variedad de recursos y materiales** que sorprendan y motiven al alumnado, propiciando mayor atención e interés por parte de éstos: *televisión, prensa, radio, diapositivas, transparencias, textos históricos, Internet, programas informáticos*, etc.

. Encontrar **aplicaciones en otras áreas** como la *física, química, tecnologías, economía, sociología, etc*. para que el alumno no vea las matemáticas como algo aislado y pueda intercomunicar sus conocimientos y encontrar sentido a las mismas.

. La **historia de la ciencia** y **de las matemáticas**, será un apoyo muy eficaz en los procesos de aprendizaje, porque ayudan a comprender la construcción del *conocimiento científico*.

- Relevancia de la investigación y la resolución de problemas: Se proponen **actividades y trabajos de investigación** donde el alumnado desarrolle sus capacidades cognitivas y deban valerse por sí solos para buscar soluciones y conclusiones. Además, hemos de conseguir, que el alumno/a conozca y perfeccione el uso de las herramientas ya conocidas, y que sea capaz de **interpretar la realidad** y de comprender la **utilidad de las matemáticas** en problemas reales.

- **El alumno/a es motor de su aprendizaje:** Las actividades planteadas cuentan con distintos grados de dificultad, organizándose en tiempos y contenidos para que, en la medida de lo posible, **cada uno alcance su ritmo óptimo de aprendizaje**, y garantizar la adquisición de las capacidades establecidas por el currículo.

4.3.1.2. ACTIVIDADES.

La adecuada **secuenciación de las actividades** durante el desarrollo de la programación permite que los alumnos/as progresen adecuadamente en la adquisición de nuevos conocimientos. Las actividades propuestas tanto en la Programación del Área Científico-Tecnológica como en la Programación del Departamento de Matemáticas del IES Celia Viñas se dividen en:

- **Actividades de iniciación-motivación y explicitación de los conocimientos previos:** Pretenden despertar el interés del alumno/a, y permiten analizar el grado de conocimientos con que parte cada uno. En caso de deficiencias en los conocimientos indispensables utilizaremos actividades previas de refuerzo.

- **Actividades de desarrollo y aplicación de las nuevas ideas:** Una vez estudiados determinados conceptos o procedimientos, hemos de ponerlos en práctica hasta conseguir que sean suficientemente asimilados por el alumnado. Se irán graduando las actividades desde simples aplicaciones directas de lo estudiado hasta actividades que profundicen y desarrollen la construcción de estrategias más complejas.

- **Actividades de investigación y trabajo práctico:** Trata de que los alumnos/as sean capaces por sí solos de plantearse e intentar resolver situaciones reales mediante la *búsqueda de datos*, *planteamiento de hipótesis* y *resolución* de estos planteamientos.

- **Actividades de revisión:** Para recordar conocimientos y encontrar nuevas aplicaciones.

- **Actividades de refuerzo y recuperación:** Destinadas a consolidar en los alumno/as los conocimientos básicos para poder progresar y adquirir nuevas estrategias.

- **Actividades de ampliación:** Destinadas a profundizar en temas relacionados con lo estudiado, mediante la búsqueda de nuevas aplicaciones e incluso la adquisición de nuevos conocimientos derivados de los ya conocidos.

- **Actividades finales o de consolidación:** Serán actividades con carácter globalizado, pues su objetivo es hacer un repaso general de lo estudiado. Serán útiles para destacar los contenidos más importantes y sus aplicaciones, plantear la resolución de problemas relacionados y recordar las relaciones existentes entre los diversos elementos.

Las actividades planteadas en la presente programación se centran en las del tipo **iniciación-motivación y explicitación de los conocimientos previos**, **de investigación y trabajo práctico,** y **finales o de consolidación**.

4.3.1.3. MATERIALES, RECURSOS Y AGRUPAMIENTOS.

A la hora de planificar la programación se ha de tener muy en cuenta los **recursos y materiales** así como los distintos **agrupamientos** que se van a utilizar. Una buena elección de los mismos permitirá, entre otras cosas, aproximar al alumnado a la realidad que se pretende estudiar, facilitar su comprensión y atender a los distintos ritmos de aprendizaje de cada uno. Por tanto, para la actividad quedan específicamente detallados todos los materiales y recursos que son necesarios para su desarrollo así como los agrupamientos y dinámicas que van a utilizarse.

A continuación se hace un breve compendio de materiales y recursos disponibles en relación con la enseñanza de Geometría.

RECURSOS

Recurso educativo es cualquier material que, en un contexto educativo determinado, sea utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de las actividades formativas.

Tangram y puzzles geométricos

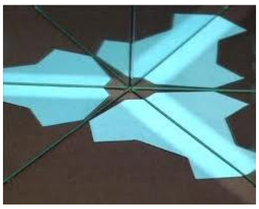
El manejo de los puzzles geométricos estimula la adquisición de habilidades de visualización, reproducción, construcción y comunicación.

Doblado de papel

El origami o papiroflexia constituye un excelente recurso para la enseñanza de la geometría. Se pueden elaborar figuras siguiendo las instrucciones del profesor o de un manual, o resolver problemas con el doblado de papel. Se desarrollan las habilidades de comunicación y visualización. Además, en los distintos dobleces, los alumnos están en contacto con diversos conceptos geométricos: diagonales, alturas, lados... Si lo que se desea es que los estudiantes se apropien del vocabulario geométrico, la papiroflexia puede trabajarse dando las instrucciones oralmente o por escrito, usando términos geométricos y cuestionando a los alumnos sobre las figuras que se van obteniendo y sus características.

Espejos

Ideales para validar y construir figuras simétricas. Si se hace un libro de espejos (dos espejos pegados por uno de sus lados, a modo de bisagra que se abre y se cierra) se puede explorar la generación de polígonos regulares. ¿Cuánto debe medir el ángulo entre los espejos para que, al ponerse sobre un papel con una recta dibujada, forme un determinado polígono semejante?



Cubos de madera

Con ellos se pueden construir diferentes cuerpos geométricos y dibujar las vistas frontal, lateral o superior; o bien, dadas las vistas, que el alumno reconstruya el cuerpo geométrico.

Mecanos

Un mecano es un sistema de construcción de modelos consistente en piezas de diversos tamaños, forma y color construidas en metal con filas de barrenos (agujeros) para sujetarlas a otras piezas por medio de tornillos. Las figuras construidas son deformables, por lo que los alumnos pueden experimentar con la geometría dinámica.

MATERIALES

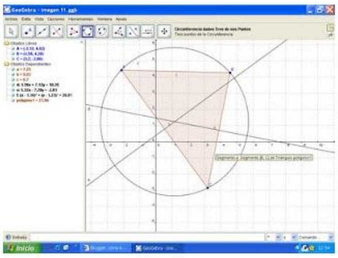
Se considera material didáctico a cualquier material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje, como por ejemplo, un libro de texto

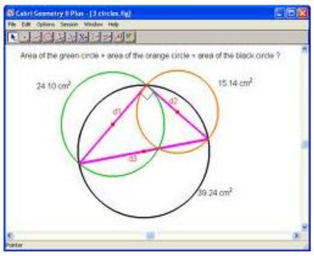
Geoplano

Tablero cuadrado de madera al que previamente se le traza una cuadrícula (del tamaño deseado) y en cada punto de intersección de dos líneas de la cuadrícula se clava un clavo dejando una parte de el mismo fuera para que pueda sujetar ligas o gomas elásticas. Un buen número de ligas es 5x5=25. Con ligas de colores pueden formarse diferentes figuras geométricas.

Software de geometría

Geogebra, Geoclic, Cabri… El uso de algunos paquetes de geometría dinámica ha tenido gran impacto en el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría. Con estas herramientas se pueden abordar problemas interesantes.





REFLEXIONES

- Se debe ser muy cauteloso en el empleo de materiales concretos, las actividades que se propongan con ellos deben ser acordes con el enfoque de resolución de problemas.

- Con el uso de material concreto no se pretende, de ninguna manera, proponer una enseñanza de las Matemáticas sensual-empirista basada en la idea de que *nada hay en la mente que no haya pasado por los sentidos*. Se sabe que los sentidos engañan y que las verdades matemáticas están por encima de las demostraciones empíricas y son producto de operaciones mentales.

- Con el uso de material concreto tampoco se pretende hacer pasar a los alumnos por las conocidas etapas concreta, gráfica y simbólica que suponen que el estudiante copia pasivamente del exterior en una secuencia lineal de abstracciones sucesivas. La matemática no se prende de esta manera, esas etapas nada tienen que ver con un aprendizaje significativo. El alumno construye conocimiento cuando interactúa de manera activa con el objeto de estudio, de ahí la importancia de que los ejercicios con el material concreto realmente promuevan la actividad mental de los estudiantes.

- El material concreto no es la panacea para la enseñanza de las Matemáticas, tiene sus bondades pero también sus limitaciones. Por ejemplo, si se desea explorar los polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, etcétera) el geoplano cuadriculado resulta totalmente inadecuado pues en él sólo se puede construir el cuadrado, y no el triángulo equilátero ni ninguno de los otros polígonos regulares. Esto constituye un buen ejemplo para mostrar que los sentidos engañan.

- Existen actividades interesantes y significativas que no emplean material concreto, es decir, este es importante, pero no indispensable en la enseñanza de las matemáticas.

4.3.1.4. LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS COMO RECURSO.

Las Tecnologías de la Información y Comunicación, como nuevo recurso, merecen un capítulo aparte, ya que hoy día ocupan un lugar destacado como material y recurso didáctico gracias, entre otros, al uso cada vez más extendido de los ordenadores en el aula. Desde el momento en que son un *instrumento de utilización individual*, se convierten en clave para aprender procesos que requieren de la individualización: respetan ritmos y tiempos de cada aprendiz, solucionan problemas a medida y están siempre dispuestos. Son herramientas que liberan al profesor de ser portadores de mera información para ayudarle a ser cada vez más orientador en la investigación y en definitiva en el *aprender a aprender*. Aplicaremos, principalmente, el uso de las nuevas tecnologías y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde dos ámbitos:

- El uso de **programas y aplicaciones informáticas** para el desarrollo y la resolución de problemas, fomentar la creatividad y la reflexión y permitir la investigación, el ensayo-error y la autoevaluación. En esta programación trabajamos con la el programa *Geogebra* . Además, se anima a los alumnos y alumnas para que desarrollen sus proyectos con programas de diseño gráfico.

- El uso de **internet** como medio de *búsqueda de información* para *investigar, inquirir, cuestionar y crear*. Ha de utilizarse con unos objetivos claros que eviten la dispersión y las pérdidas de tiempo, y siempre bajo la supervisión del profesor. Se utilizarán también algunas páginas Web como recursos matemáticos de interés que se incluyen en la bibliografía.

4.3.2. ACTIVIDAD: PROYECTO COLLAGE.

Recordemos que nuestro objetivo de aprendizaje es el "reconocimiento y caracterización de figuras geométricas planas".

4.3.2.1. OBJETIVOS Y CONTENIDOS.

<table>
<tr><th rowspan="2">OBJETIVOS DIDÁCTICOS</th><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actitudes</th></tr>
<tr><td>Identificar distintos polígonos en el plano y determinar sus elementos, así como los lugares geométricos relacionados</td><td rowspan="4">- Triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares
- Figuras circulares
- Lugares geométricos:
segmento, mediatriz, bisectriz y circunferencia</td><td>-Reconocimiento de figuras planas en una representación
-Representación y clasificación de polígonos y sus elementos</td><td>-Precisión, orden y limpieza en la representación de polígonos</td></tr>
<tr><td>Reconocer la presencia de las figuras geométricas planas en el entorno próximo, la naturaleza y el arte.</td><td>- Observación de las formas del entorno diferenciando sus cualidades visuales.</td><td>-Reconocimiento de la importancia de observar las formas geométricas de los objetos para comprender su función.</td></tr>
<tr><td>Valorar las propiedades geométricas y estéticas de las figuras planas, y aplicarlas en los propios diseños.</td><td>- Realización de composiciones con polígonos y figuras circulares.</td><td>- Apreciación de las distintas cualidades visuales de las formas geométricas.
- Confianza en las propias capacidades para crear composiciones utilizando las figuras planas.</td></tr>
<tr><td>Plantear y resolver problemas reales donde se utilicen figuras planas y lugares geométricos.</td><td>- Resolución de problemas reales en los que se utilicen las figuras planas, cálculo de medidas y áreas.</td><td>- Valorar las aplicaciones de la geometría en elementos del entorno y de otras materias.
- Interés por encontrar aplicaciones de la geometría en problemas reales.</td></tr>
</table>

4.3.2.2. CAPACIDADES Y COMPETENCIAS BÁSICAS.

Capacidades	Competencias Básicas							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en sus representaciones gráfica y figurativa.		X	X			X		
2. Identificar los elementos más importantes de las figuras: vértices, lados, ángulos y elementos notables.		X						
3. Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.		X						
4. Conocer los criterios de clasificación de las figuras.		X						
5. Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.	X	X						
6. Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.	X	X				X	X	X
7. Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.	X	X	X			X	X	X
8. Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.		X	X			X		
9. Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.	X	X	X	X	X	X	X	X
10. Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.		X	X				X	X

1 Competencia en comunicación lingüística.
2 Competencia de razonamiento matemático.
3 Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico y natural.
4 Competencia digital y tratamiento de la información.
5 Competencia social y ciudadana.
6 Competencia cultural y artística.
7 Competencia para aprender a aprender.
8 Competencia para la autonomía e iniciativa personal.

4.3.2.3. AGRUPACIONES, TEMPORALIZACIÓN GENERAL, MATERIALES Y RECURSOS.

Agrupaciones	Trabajo individual.
Temporalización	Cuatro sesiones.
Materiales y recursos	Material para realizar el collage. Ordenadores e internet. Software de diseño gráfico y *Geogebra*. Proyector en el aula. Biblioteca y libro de texto.

4.3.2.4. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD.

En esta actividad, deberéis:

- Buscar en internet y en libros de la biblioteca imágenes del entorno cercano, la naturaleza y el arte donde aparezcan triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y/o figuras circulares.
- Proponer un ejemplo de un problema de la vida cotidiana que se pueda resolver aplicando los conocimientos adquiridos sobre geometría plana.
- Elaborar un *collage* o póster donde se reflejen:
  - las imágenes encontradas,
  - todo lo que hayáis aprendido sobre las figuras planas que escogidas: características, tipos, elementos notables, datos históricos, etc.
  - el problema propuesto junto con su resolución gráfica, para la que se utilizará el programa *Geogebra*.

  La técnica será libre y podrá realizarse en soporte físico o soporte digital. En ese caso, se utilizará un programa de diseño gráfico sencillo.

- Preparar una presentación en para exponer vuestras creaciones al resto del grupo.
- Votar los trabajos de vuestros compañeros. El autor del trabajo más votado subirá puntuación en su nota final.

4.3.2.5. SECUENCIACIÓN TEMPORAL PORMENORIZADA.

SESIONES (60 minutos)	**DESARROLLO PREVISTO**
Sesión 1	- Introducción por parte del profesor: objetivos, contenidos, criterios evaluación y mecánica de trabajo de las siguientes sesiones. - Guión temático y/o mapa conceptual. - **Proyecto Collage I.** Búsqueda de información en libro de texto, ordenadores y biblioteca.
Sesión 2	- **Proyecto Collage II.** Taller de *Geogebra.* Resolución de problemas propuestos.
Sesión 3	- **Proyecto Collage III.** Elaboración del collage.
Sesión 4	- **Proyecto Collage IV.** Presentación de los trabajos y votación.

4.3.2.6. EVALUACIÓN.

	MEJORABLE	REGULAR	BIEN	EXCELENTE
ASPECTOS GEOMÉTRICOS				
Identificación de figuras planas en el entorno, la naturaleza y el arte.	Identificación incorrecta de la mayoría de las figuras.	Identificación correcta de pocas figuras.	Identificación correcta de la mayoría de las figuras.	Identificación correcta de una gran variedad de figuras.
COLLAGE				
Explicación de las propiedades de la figura.	Explicación incorrecta o insuficiente de la mayor parte de las propiedades de las figuras.	Explicación correcta y suficiente de algunas propiedades de las figuras, e incorrecta o insuficiente de otras.	Explicación correcta y suficiente de las propiedades de las figuras.	Explicación correcta, detallada y ordenada de las propiedades de las figuras, con ejemplos ilustrativos de las mismas.
Variedad de figuras elegidas.	El trabajo trata de tres o menos figuras.	El trabajo trata de menos de la mitad de las figuras estudiadas.	El trabajo trata de más de la mitad de las figuras estudiadas.	El trabajo trata de todas las figuras estudiadas.
Expresividad de la técnica.	Ejecución de la técnica poco elaborada e inexpresiva.	Ejecución de la técnica elaborada, pero poco expresiva.	Ejecución de la técnica elaborada y expresiva.	Ejecución de la técnica de manera idónea, expresiva y original, con uso de las TIC.
PROBLEMA GEOMÉTRICO DE LA VIDA COTIDIANA				
Validez del ejemplo.	Ejemplo y/o solución incorrectos, no se ha utilizado *Geogebra.*	Ejemplo y solución correctos, pero no se ha utilizado *Geogebra*.	Ejemplo correcto y solución completa hallada con *Geogebra*.	Ejemplo real y cercano, solución completa e ilustrativa hallada con *Geogebra.*
EXPOSICIÓN				
Corrección en la exposición.	Exposición desordenada, incompleta y poco comprensible.	Exposición ordenada y comprensible, pero incompleta o no ajustada al tiempo previsto.	Exposición ordenada, comprensible y completa, ajustada al tiempo previsto.	Exposición completa, muy ordenada y comprensible, ajustada al tiempo previsto, con buena expresión oral y corporal del alumno.

4.4. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN.

La planificación de aula confeccionada se llevó la práctica durante el periodo de Prácticum del Máster de Profesorado. A continuación se detallan los resultados obtenidos.

4.4.1. CAMINOS DE APRENDIZAJE.

Veamos, en primer lugar, los caminos de aprendizaje que tuvieron lugar cuando la secuencia didáctica diseñada se puso en práctica en el aula, para compararlos con las previsiones del Análisis Cognitivo.

En el Análisis Cognitivo se previó un camino de aprendizaje en el que las capacidades habrían de sucederse de la siguiente manera:

- Etapa 1. En una primera fase se comprueban las nociones generales que los alumnos tienen sobre el objeto de estudio, recordándose conceptos geométricos ya conocidos, y poniéndolos en relación con su dimensión fenomenológica.

C7. Describir situaciones y contextos en los que se encuentren figuras geométricas.
C1. Reconocer las distintas figuras geométricas y sus propiedades, en representaciones gráficas y figurativas.
C6. Ejemplificar figuras geométricas a partir de su definición.

- Etapa 2. En la segunda fase, se pasa de una visión más general o superficial de dichos conceptos geométricos, para ahondar en el conocimiento detallado de sus características, simbología y criterios de clasificación.

C2. Identificar los elementos más importantes de las figuras.
C3. Utilizar con corrección las notaciones simbólicas de los elementos configuradores de las figuras geométricas.
C4. Conocer los criterios de clasificación de las figuras.
C5. Proporcionar argumentos para justificar a qué tipo pertenece una figura geométrica.

- Etapa 3. Por último, se adquieren capacidades más complejas y relevantes para la adquisición de las competencias básicas y matemáticas, objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

C10. Utilizar las figuras geométricas y sus propiedades como medio de resolución de problemas sencillos de la vida cotidiana.
C9. Planificar, elaborar y defender individualmente un proyecto gráfico en el que se incluya la geometría como medio de expresión de ideas y conceptos.
C8. Apreciar la aportación de la geometría a otros ámbitos del conocimiento humano, como el arte y la arquitectura.

La planificación de aula se planteó de esta manera, y así sucedió en la práctica, en términos generales, al menos en lo que al orden de las etapas se refiere. Dentro de cada una de ellas, las distintas capacidades se fueron adquiriendo, según las particularidades de cada alumno, en un orden distinto, o varias a la vez. En algunos casos, no se llegaron a adquirir todas las capacidades previstas, pero como mínimo se adquirieron una o más de cada etapa.

Se concluye, por tanto, que el camino de aprendizaje previsto se corresponde, de ordinario, con el seguido por los alumnos, con pequeñas diferencias particulares, por lo que el modelo es satisfactorio, mejorable, si cabe, en lo que a flexibilidad se refiere, para adaptarse a dichas particularidades.

4.4.2. ERRORES Y DIFICULTADES.

De los errores y dificultades que se previeron en el Análisis Cognitivo, las que menos relevancia tuvieron fueron:

- Dificultades para distinguir entre el concepto abstracto y las aproximaciones reales imperfectas del mismo. (**C1**, **C3**, **C6**, **C7**, **C8**, **C10**)

Efectivamente, en la actividad diseñada se pide que el alumno busque en internet y en libros de la biblioteca imágenes del entorno cercano, la naturaleza y el arte donde aparezcan triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y/o figuras circulares, sin dificultades significativas para ello, incluso para distinguir entre figuras geométricas planas y cuerpos geométricos (círculo-esfera, triángulo-pirámide).

Las demás dificultades previstas sí que se dieron, en mayor o menor medida:

- Por distractores estructurales y de orientación, dificultad para reconocer:

    - triángulos y cuadrados que no tienen su base paralela al borde del papel,
    - rectas perpendiculares no paralelas a los bordes del folio,
    - triángulos rectángulos no apoyados en uno de sus catetos,
    - rombos apoyados sobre uno de sus lados,
    - triángulos isósceles cuyos lados iguales son más pequeños que el lado desigual, o están apoyados en uno de los lados iguales,
    - alturas en triángulos obtusángulos o rectos,
    - figuras planas cóncavas.

    (**C1**, **C2**, **C5**, **C7**)

En los ejercicios propuestos por los alumnos, las representaciones gráficas de las figuras correspondían a las tradicionales de lados horizontales y verticales, polígonos regulares, figuras planas convexas, etcétera, de lo que se deduce que existe cierta dificultad en distinguir y caracterizar aquellas figuras que no responden a estos modelos.

- Errores de interpretación de representaciones gráficas y simbólicas por falta de dominio del sistema de representación. (**C1**, **C2**, **C3**, **C6**)
- Dificultades en la traducción entre los distintos sistemas de representación: verbal, simbólico, gráfico, figurativo. (**C1**, **C3**, **C5**, **C6**, **C7**, **C8**, **C9**)

En el desarrollo de la actividad, los alumnos tuvieron que plasmar en un proyecto gráfico todos los conocimientos que poseían acerca de los conceptos geométricos estudiados, en todas las facetas posibles, por lo que tuvieron que poner en juego su dominio sobre los distintos sistemas de representación. En general, se detectaron dificultades importantes a la hora de manejar, interpretar y relacionar los distintos sistemas de representación, por falta de desenvoltura suficiente en cada uno de ellos, sobre todo en el gráfico (inexactitud), aunque también en su traducción al simbólico (notaciones) y al verbal (propiedad de la terminología).

- Confusiones derivadas de modelos de clasificación partitivos frente a modelos inclusivos. (**C4**, **C5**)

La totalidad de las clasificaciones plasmadas en los trabajos fueron partitivas, en ningún caso se propusieron modelos inclusivos.

- En el aprendizaje basado en definiciones, incapacidad de aplicar lo teórico a lo práctico, ya que para un mismo concepto puede haber diversas definiciones, y para una misma definición, pueden realizarse distintas interpretaciones. (**C1**, **C2**, **C4**, **C5**, **C6**, **C7**, **C8**, **C9**, **C10**)

La tarea propone buscar ejemplos de problemas de la vida cotidiana que se puedan resolver aplicando los conocimientos adquiridos sobre geometría plana. Aunque se ha pretendido un modelo de aprendizaje constructivista, no basado en definiciones, se han detectado dificultades a la hora de tomar decisiones y trasladar, con un espíritu crítico y reflexivo, situaciones de la vida cotidiana al contexto teórico matemático, mediante el uso de estrategias válidas y la validación y viabilidad de dichas estrategias en el mundo real. En algunos casos, los problemas propuestos no alcanzaban el nivel de dificultad esperado para el nivel de conocimientos de los alumnos, en otros casos no tenían relación con el entorno cotidiano, en otros, las estrategias de resolución eran erróneas o inviables.

No han surgido errores o dificultades no previstos en el Análisis Cognitivo.

4.4.3. EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD.

El Análisis de Actuación, aunque no es equivalente a la evaluación, guarda una estrecha relación con ella, ya que valora el resultado de la puesta en práctica de la planificación elaborada por el profesor. Por tanto, se considera relevante el análisis de la evaluación de la actividad propuesta a los alumnos.

En cuanto a los *aspectos geométricos*, la clase, de veintiocho alumnos, en general, no tuvo dificultades significativas en la correcta identificación de gran número de figuras en el entorno próximo, la naturaleza, y el arte, ni en la descripción de situaciones y contextos en los que se encuentran figuras geométricas, obteniendo en este apartado *bien* o *excelente*.

En lo referente al *collage*, el resultado fue heterogéneo. Aproximadamente, la mitad de los alumnos dio una explicación correcta y suficiente de las propiedades de las figuras, trabajando más de la mitad de las figuras estudiadas, por lo que su calificación fue *bien*. De la otra mitad, la mayor parte obtuvo un *regular*, ya que su trabajo fue incompleto o incorrecto en parte. Dos alumnos obtuvieron un *mejorable*, debido al pobre nivel de su propuesta, y apenas un alumno obtuvo un *excelente*, con una explicación completa, correcta, detallada y ordenada de las propiedades de las figuras, con ejemplos ilustrativos de las mismas. En el subapartado *expresividad de la técnica* los resultados fueron bastante pobres, debido a la falta de originalidad y la mediocre expresividad de la misma, en general. Cabe reseñar que ningún alumno hizo uso de algún programa informático sencillo de diseño gráfico, por lo que todas las propuestas se presentaron en soporte físico.

En el apartado *problema geométrico de la vida cotidiana*, como ya se ha comentado en el apartado anterior, los problemas presentados por los alumnos están por debajo del nivel esperado, o están poco contextualizados, al haber sido copiados de libros de texto o de búsquedas en internet, o bien, no se han sido resueltos correctamente. Por ello, el resultado, en lo referente a la validez del ejemplo, en líneas generales tampoco es satisfactorio. Aquí también se ha de advertir que por falta de recursos materiales suficientes, no se ha utilizado el programa *Geogebra* para hallar la solución al mismo, sino escuadra, cartabón y compás.

En la fase de *exposición* hubo calificaciones de todo tipo (*mejorable*, *regular* y *bien*), en partes iguales, dependiendo del grado de orden y corrección de la misma. Ningún alumno obtuvo la calificación de *excelente*, ya que tanto la expresión oral como la corporal de los mismos durante la exposición fueron exiguas.

4.4.4. VALORACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN A LAS COMPETENCIAS PISA.

La actividad propuesta (*Collage*), está diseñada para:

1. Investigar: autonomía e iniciativa personal, competencia digital, conocimiento del mundo físico natural.

2. Reunir y ordenar información: tratamiento de la información.

3. Utilizar la información para la resolución de un problema: Aprender a aprender, razonamiento matemático.

4. Diseñar y exponer una presentación: Competencia cultural y artística, comunicación lingüística, competencia social y ciudadana.

A la vista de los resultados obtenidos en la puesta en práctica de la tarea, se puede decir que la misma ha contribuido a la consecución de todas estas competencias. Sin embargo, en los tres últimos puntos, el grupo de alumnos no ha demostrado la pericia esperada, por lo que será necesario incidir más en la consecución de estas competencias.

4.4.5. LOGROS Y DEFICIENCIAS DE LA PLANIFICACIÓN. PROPUESTA DE MEJORA.

Tras lo expuesto en el presente capítulo de Análisis de Actuación, se puede concluir que la actividad diseñada, en general, es acertada y se adapta a los objetivos de aprendizaje propuestos. Argumentaremos esta afirmación:

- Los caminos de aprendizaje se han desarrollado, sensiblemente, según lo previsto.
- No han surgido dificultades no pronosticadas en el Análisis Cognitivo.
- Se han trabajado, en mayor o menor medida, todas las competencias PISA.

No obstante, la planificación presenta ciertos puntos débiles o mejorables:

- Los resultados de la evaluación de los trabajos no son del todo satisfactorios, de lo que se deduce que la planificación es, quizá, ambiciosa en exceso. Quizá merecería la pena dejar de trabajar algunos temas más secundarios y profundizar en aquellos que se consideran estructurales.

Para mejorar el diseño de la programación, sería conveniente:

- Incluir más tareas de orientación de las figuras, de estructuración y de las distintas representaciones, así como reflexiones y debates sobre los nombres de las figuras, la relación imagen real y concepto, etc.

- Construir los esquemas conceptuales a partir de la experiencia del alumno, a partir de situaciones muy variadas y sin necesidad de recurrir en un principio a la definición, con el fin de estimular la capacidad del alumno para resolver situaciones cotidianas.

También es importante destacar que para llevar a buen término este tipo de actividades es muy interesante la labor conjunta de los profesores de las distintas asignaturas, departamentos y áreas (Historia del Arte, Dibujo, Informática), por lo que es aconsejable contar de antemano con la colaboración de los mismos.

5. CONCLUSIONES.

A la hora de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor de Matemáticas debe tener la capacidad de identificar y organizar los múltiples significados de los conceptos matemáticos, y seleccionar aquellos que serán objeto de la instrucción. El Análisis Didáctico comprende un conjunto de procedimientos que le permiten al profesor abordar de manera sistemática la tarea de analizar el contenido matemático escolar desde el punto de vista de ser objeto de enseñanza y aprendizaje. Resulta, por tanto, especialmente útil para aquellos profesores que iniciamos nuestra labor docente sin el bagaje previo de la experiencia, ya que, sin el conocimiento del Análisis Didáctico, careceríamos de fundamentos sólidos para articular con éxito el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de Matemáticas.

Por otra parte, el marcado carácter específico de este procedimiento, que siempre se refiere a un concepto matemático concreto, junto con el grado de profundización que requiere, como se ha podido ver en el desarrollo del presente trabajo, hace que, por razones prácticas, sea muy difícil aplicarlo, de una vez, a todos los contenidos de la asignatura. Debe ser, en consecuencia, utilizado y revisado de forma progresiva y periódica. Desde esta perspectiva, el Análisis Didáctico no sólo es una herramienta útil para el profesor en ciernes, sino que constituye toda una base metodológica mediante la cual el profesor afrontará su labor docente, y que contribuirá, sin lugar a dudas, a ampliar sus conocimientos y experiencias como tal, lo cual redundará, a su vez, en la mejora de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje, que es el objetivo que finalmente se persigue.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Legislación educativa:

- Ley Orgánica de Educación de 02/2006 y Real Decreto 1631/2006 de 29 de Diciembre.
- Ley de Educación de Andalucía 01/2008 y Decreto 231/2007, de 31 de Julio.
- Orden de 10 de Agosto de 2007 DE Andalucía.
- Instrucciones de 17 de Diciembre de evaluación (Andalucía).

Documentos curriculares:

- Proyecto Curricular de Centro del IES Celia Viñas de Almería.
- Programación del Área Científico-Tecnológica del IES Celia Viñas de Almería.
- Programación del Departamento de Matemáticas del IES Celia Viñas de Almería.

Bibliografía matemática:

- Libro de texto 3ºESO. (2011). *Proyecto Esfera.* Editorial SM: Madrid.
- Bolt, B. y Hobbs, D. (1991). *Actividades matemáticas*, *101 Proyectos matemáticos*, *Más actividades matemáticas*, Editorial Labor: Barcelona.
- Paenza, A. *Matemática … ¿estás ahí?, Matemática… ¿estás ahí? Episodio 2, Matemática… ¿estás ahí? Episodio 3,14.* Siglo XXI Editores: Barcelona.
- Perelman, Y. (2000) *Matemática recreativa*, *Geometría recreativa.* Editorial Mir: Madrid.

Bibliografía didáctica:

- Goméz, P. (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas*. Revista EMA, Vol. 7, nº 3,251-292.
- Moreno, M. F. (1998). *Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria.* Almería: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.
- Moreno, M.F. (2007). *De la matemática formal a la matemática escolar*. PNA, 1(3), 99-111.
- Puig, L. y Niss, M. (1966). *Investigación y didáctica de las matemáticas.* CIDE: Madrid.
- Rico, L. (1997). *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria.* Horsori: Barcelona.

Bibliografía psicopedagógica:

- Álvarez Pérez, L. y Soler Vázquez, E. (1998) *¿Qué hacemos con los alumnos diferentes? Cómo elaborar adaptaciones curriculares*. SM: Madrid.
- Galligó, M. (2002) *El aprendizaje y sus trastornos*. CEAC: Barcelona.
- González Manjón, D. (2002) *Las dificultades de aprendizaje en el aula*. Edebé: Barcelona.

Publicaciones y páginas web:

http://geogebra.es/cvg/index.html
http://poligonos1.blogspot.com.es/2005/10/la-historia-y-la-geometra-i-todo.html
http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n15/en1505.pdf
http://proyectoepla.wikispaces.com/Geometr%C3%ADa+en+la+naturaleza+y+el+arte
http://es.scribd.com/doc/49976864/Dificultades-de-aprendizaje-en-geometria
http://issuu.com/a01002615/docs/laensenanzadelageometria?mode=window&pageNumber=2